Calculs de domaines fondamentaux de groupes arithmétiques II

Aurel Page

encadré par John Voight

8 décembre 2010

Rappel

Soit F un corps TR/ATR, B une algèbre de quaternions fuchsienne/kleinienne sur F et $\mathcal{O}$ un ordre dans B.
Alors $\Gamma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1^\times/\{\pm 1\}$ est un groupe fuchsien/kleinéen de coaire/covolume finie, cocompact ssi B est une algèbre à division.
On cherche à calculer un domaine de Dirichlet dans $\mathcal{H}^2/\mathcal{H}^3$ et une présentation pour ce groupe.

Définition

La boule unité $\mathcal{B}$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} + \mathbb{R}j \subset \mathbb{H}$ muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2 + dt^2)}{(1 - |w|^2)^2}$$

où $w = z + tj \in \mathcal{B}$, $z = x + iy$ and $|w|^2 = x^2 + y^2 + t^2 \leq 1$.

Proposition

La boule unité est isométrique au demi-espace de Poincaré. On a une formule explicite pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{B}$ et pour la distance entre deux éléments de $\mathcal{B}$.

Définition

La boule unité $\mathcal{B}$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} + \mathbb{R}j \subset \mathbb{H}$ muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2 + dt^2)}{(1 - |w|^2)^2}$$

où $w = z + tj \in \mathcal{B}$, $z = x + iy$ and $|w|^2 = x^2 + y^2 + t^2 \leq 1$.

Proposition

La boule unité est isométrique au demi-espace de Poincaré. On a une formule explicite pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *sur* $\mathcal{B}$ *et pour la distance entre deux éléments de* $\mathcal{B}$*.*

Définitions

Supposons que $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ne fixe pas 0 dans $\mathcal{B}$. On pose alors

- $\mathrm{I}(g) = \{w \in \mathcal{B} \mid \mathrm{d}(w,0) = \mathrm{d}(g \cdot w, 0)\}$;
- $\mathrm{Ext}(g) = \{w \in \mathcal{B} \mid \mathrm{d}(w,0) < \mathrm{d}(g \cdot w, 0)\}$;
- $\mathrm{Int}(g) = \{w \in \mathcal{B} \mid \mathrm{d}(w,0) > \mathrm{d}(g \cdot w, 0)\}$;

$\mathrm{I}(g)$ est la sphère isometrique de g. Pour $S \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dont aucun élément ne fixe 0, le domaine extérieur de S est

$$\mathrm{Ext}(S) = \bigcap_{g \in S} \mathrm{Ext}(g).$$

Définitions

Supposons que $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ne fixe pas 0 dans $\mathcal{B}$. On pose alors

- $\mathrm{I}(g) = \{w \in \mathcal{B} \mid \mathrm{d}(w, 0) = \mathrm{d}(g \cdot w, 0)\}$;
- $\mathrm{Ext}(g) = \{w \in \mathcal{B} \mid \mathrm{d}(w, 0) < \mathrm{d}(g \cdot w, 0)\}$;
- $\mathrm{Int}(g) = \{w \in \mathcal{B} \mid \mathrm{d}(w, 0) > \mathrm{d}(g \cdot w, 0)\}$;

$\mathrm{I}(g)$ est la sphère isometrique de g. Pour $S \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dont aucun élément ne fixe 0, le domaine extérieur de S est

$$\mathrm{Ext}(S) = \bigcap_{g \in S} \mathrm{Ext}(g).$$

Proposition

Soit $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *qui ne fixe pas* 0 *dans* $\mathcal{B}$*. Alors* $\mathrm{I}(g)$ *(resp.* $\mathrm{Ext}(g)$*,*$\mathrm{Int}(g)$*) est l'intersection avec* $\mathcal{B}$ *d'une sphère euclidienne (resp. de l'extérieur, de l'intérieur de cette sphère). On a une formule explicite pour le centre et le rayon de cette sphère.*

Remarque

Si 0 a un stabilisateur trivial dans le groupe Γ, alors on a

$$D_0(\Gamma) = \mathrm{Ext}(\Gamma \setminus \{1\}).$$

Quitte à conjuguer Γ, on peut supposer que 0 a un stabilisateur trivial.

Proposition

Soit $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ qui ne fixe pas 0 dans $\mathcal{B}$. Alors $\mathrm{I}(g)$ (resp. $\mathrm{Ext}(g)$,$\mathrm{Int}(g)$) est l'intersection avec $\mathcal{B}$ d'une sphère euclidienne (resp. de l'extérieur, de l'intérieur de cette sphère). On a une formule explicite pour le centre et le rayon de cette sphère.

Remarque

Si 0 a un stabilisateur trivial dans le groupe Γ, alors on a

$$D_0(\Gamma) = \mathrm{Ext}(\Gamma \setminus \{1\}).$$

Quitte à conjuguer Γ, on peut supposer que 0 a un stabilisateur trivial.

Remarque

Il existe un ensemble fini S tel que $\mathrm{Ext}(S) = \mathrm{Ext}(\Gamma \setminus \{1\})$.

Algorithme

Énumérer les éléments de Γ dans un ensemble fini S jusqu'à avoir

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Ext}(S)) = \mathrm{Covol}(\Gamma).$$

Remarque

Il existe un ensemble fini S tel que $\mathrm{Ext}(S) = \mathrm{Ext}(\Gamma \setminus \{1\})$.

Algorithme

Énumérer les éléments de Γ dans un ensemble fini S jusqu'à avoir

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Ext}(S)) = \mathrm{Covol}(\Gamma).$$

Lemme

Soit $\gamma \in \Gamma$ *et* $\mathcal{F} = \mathrm{Ext}(\Gamma \setminus \{1\})$. *Alors* $\gamma \cdot \mathrm{I}(\gamma) = \mathrm{I}(\gamma^{-1})$, *et* $\mathrm{I}(\gamma)$ *contribue à la frontière de* $\mathcal{F}$ *si et seulement si c'est le cas de* $\mathrm{I}(\gamma^{-1})$.

Remarque

Le couplage d'un domaine extérieur est donné par les sphères isométriques.

Lemme

Soit $\gamma \in \Gamma$ *et* $\mathcal{F} = \mathrm{Ext}(\Gamma \setminus \{1\})$. *Alors* $\gamma \cdot \mathrm{I}(\gamma) = \mathrm{I}(\gamma^{-1})$, *et* $\mathrm{I}(\gamma)$ *contribue à la frontière de* $\mathcal{F}$ *si et seulement si c'est le cas de* $\mathrm{I}(\gamma^{-1})$.

Remarque

Le couplage d'un domaine extérieur est donné par les sphères isométriques.

Proposition

Soit $P \subset \mathcal{H}^2$ un polygone à n sommets, et d'angles intérieurs à chaque sommet $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Alors l'aire de P est donnée par

$$\mu(P) = (n-2)\pi - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n).$$

Proposition

L'intégrale

$$-\int_0^\theta \ln|2\sin u|\,\mathrm{d}u$$

converge pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et admet un prolongement continu à $\mathbb{R}$ qui est impair et π-périodique.

Définition

Cette extension est appelée la fonction de Lobachevski $\mathcal{L}(\theta)$.

Proposition

L'intégrale

$$-\int_0^\theta \ln|2\sin u|\,du$$

converge pour $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ et admet un prolongement continu à $\mathbb{R}$ qui est impair et π-périodique.

Définition

Cette extension est appelée la fonction de Lobachevski $\mathcal{L}(\theta)$.

Proposition

La fonction de Lobachevski admet un développement en série entière

$$\mathcal{L}(\theta) = \theta\left(1 - \ln(2\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}|B_{2n}|}{2n(2n+1)!}\theta^{2n}\right)$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli définis par

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Proposition

Soit $T_{\alpha,\gamma}$ le tétraèdre de $\mathcal{H}^3$ qui possède un sommet en ∞ et les autres sommets A, B, C sur la demi-sphère unité, tels qu'ils se projettent verticalement dans $\mathbb{C}$ sur A', B', C' avec $A' = 0$, formant un triangle euclidien ayant pour angles $\frac{\pi}{2}$ en B' et α en A', et tel que l'angle le long de BC est γ. Alors $T_{\alpha,\gamma}$ est unique à isométrie près et on a

$$\mathrm{Vol}(T_{\alpha,\gamma}) = \frac{1}{4}\left[\mathcal{L}(\alpha+\gamma) + \mathcal{L}(\alpha-\gamma) + 2\mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right].$$

Remarque

Tout polyèdre P peut être décomposé en une somme algébrique de tétraèdres $T_{\alpha,\gamma}$.

Proposition

Soit $T_{\alpha,\gamma}$ *le tétraèdre de* $\mathcal{H}^3$ *qui possède un sommet en* ∞ *et les autres sommets* A, B, C *sur la demi-sphère unité, tels qu'ils se projettent verticalement dans* $\mathbb{C}$ *sur* A', B', C' *avec* $A' = 0$*, formant un triangle euclidien ayant pour angles* $\frac{\pi}{2}$ *en* B' *et* α *en* A'*, et tel que l'angle le long de* BC *est* γ*. Alors* $T_{\alpha,\gamma}$ *est unique à isométrie près et on a*

$$\mathrm{Vol}(T_{\alpha,\gamma}) = \frac{1}{4}\left[\mathcal{L}(\alpha+\gamma) + \mathcal{L}(\alpha-\gamma) + 2\mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right].$$

Remarque

Tout polyèdre P peut être décomposé en une somme algébrique de tétraèdres $T_{\alpha,\gamma}$.

Définition

Soit $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, posons $\operatorname{invrad}(m) = |c + \overline{b}|^2 + |d - \overline{a}|^2$.
Pour $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\gamma \cdot 0 \neq 0$, soit $\operatorname{rad}(\gamma)$ le rayon de $\mathrm{I}(\gamma)$.

Proposition

Soit $\rho : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ le plongement usuel. La norme réduite absolue $Q : B \to \mathbb{R}$ définie par

$$Q(x) = \operatorname{invrad}(\rho(x)) + \operatorname{tr}_{F/\mathbb{Q}}(\operatorname{nrd}(x)) \text{ pour tout } x \in B$$

donne à $\mathcal{O}$ une structure de réseau, et on a

$$\text{pour tout } x \in \mathcal{O}_1^\times,\ Q(x) = \frac{4}{\operatorname{rad}(\rho(x))^2} + n.$$

Définition

Soit $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, posons $\mathrm{invrad}(m) = \left|c + \overline{b}\right|^2 + \left|d - \overline{a}\right|^2$.
Pour $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\gamma \cdot 0 \neq 0$, soit $\mathrm{rad}(\gamma)$ le rayon de $\mathrm{I}(\gamma)$.

Proposition

Soit $\rho : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ le plongement usuel. La norme réduite absolue $Q : B \to \mathbb{R}$ définie par

$$Q(x) = \mathrm{invrad}(\rho(x)) + \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}(\mathrm{nrd}(x)) \text{ pour tout } x \in B$$

donne à $\mathcal{O}$ une structure de réseau, et on a

$$\text{pour tout } x \in \mathcal{O}_1^\times,\ Q(x) = \frac{4}{\mathrm{rad}(\rho(x))^2} + n.$$

Définition

Soit Γ un groupe fuchsien/kleinén et $S \subset \Gamma$. Un point $z \in \mathcal{B}$ est *S-réduit* si pour tout $g \in S$, on a $\mathrm{d}(z, 0) \leq \mathrm{d}(g \cdot z, 0)$, i.e. si $z \in \overline{\mathrm{Ext}(S)}$.

Algorithme

Entrée : $z \in \mathcal{B}$.
Soit $z' = z$. Si $\mathrm{d}(g \cdot z', 0) < \mathrm{d}(z', 0)$ pour un $g \in S$, alors faire $z' = g \cdot z'$ et répéter.
Sortie : $z' \in \mathcal{B}$, S-réduit et $\delta \in \langle S \rangle$ t.q. $z' = \delta \cdot z$.

Définition

Soit Γ un groupe fuchsien/kleinén et $S \subset \Gamma$. Un point $z \in \mathcal{B}$ est *S-réduit* si pour tout $g \in S$, on a $\mathrm{d}(z,0) \leq \mathrm{d}(g \cdot z, 0)$, i.e. si $z \in \overline{\mathrm{Ext}(S)}$.

Algorithme

Entrée : $z \in \mathcal{B}$.
Soit $z' = z$. Si $\mathrm{d}(g \cdot z', 0) < \mathrm{d}(z', 0)$ pour un $g \in S$, alors faire $z' = g \cdot z'$ et répéter.
Sortie : $z' \in \mathcal{B}$, S-réduit et $\delta \in \langle S \rangle$ t.q. $z' = \delta \cdot z$.

Si un point z a un stabilisateur trivial, alors l'application orbitale $\gamma \mapsto \gamma \cdot z$ est une bijection.

Définition

Soit Γ un groupe fuchsien/kleinéen, $S \subset \Gamma$ et $z \in \mathcal{B}$. Un élément $\gamma \in \Gamma$ est (S, z)-réduit si $\gamma \cdot z$ est S-réduit, i.e. si $\gamma \cdot z \in \overline{\mathrm{Ext}(S)}$. On note $\mathrm{Red}_S(\gamma; z)$ l'élément réduit calculé par l'algorithme précédent, et simplement $\mathrm{Red}_S(\gamma) = \mathrm{Red}_S(\gamma; 0)$.

Proposition

Supposons que $\mathrm{Ext}(S)$ *est un domaine fondamental pour* $\langle S \rangle$. *Pour tout* $z \in \mathrm{Ext}(S)$, *on a* $\mathrm{Red}_S(\gamma) = 1$ *si et seulement si* $\gamma \in \langle S \rangle$.

Si un point z a un stabilisateur trivial, alors l'application orbitale $\gamma \mapsto \gamma \cdot z$ est une bijection.

Définition

Soit Γ un groupe fuchsien/kleinéen, $S \subset \Gamma$ et $z \in \mathcal{B}$. Un élément $\gamma \in \Gamma$ est (S, z)-réduit si $\gamma \cdot z$ est S-réduit, i.e. si $\gamma \cdot z \in \overline{\mathrm{Ext}(S)}$. On note $\mathrm{Red}_S(\gamma; z)$ l'élément réduit calculé par l'algorithme précédent, et simplement $\mathrm{Red}_S(\gamma) = \mathrm{Red}_S(\gamma; 0)$.

Proposition

Supposons que $\mathrm{Ext}(S)$ *est un domaine fondamental pour* $\langle S \rangle$. *Pour tout* $z \in \mathrm{Ext}(S)$, *on a* $\mathrm{Red}_S(\gamma) = 1$ *si et seulement si* $\gamma \in \langle S \rangle$.

Si un point z a un stabilisateur trivial, alors l'application orbitale $\gamma \mapsto \gamma \cdot z$ est une bijection.

Définition

Soit Γ un groupe fuchsien/kleinéen, $S \subset \Gamma$ et $z \in \mathcal{B}$. Un élément $\gamma \in \Gamma$ est (S, z)-réduit si $\gamma \cdot z$ est S-réduit, i.e. si $\gamma \cdot z \in \overline{\text{Ext}}(S)$. On note $\text{Red}_S(\gamma; z)$ l'élément réduit calculé par l'algorithme précédent, et simplement $\text{Red}_S(\gamma) = \text{Red}_S(\gamma; 0)$.

Proposition

Supposons que $\text{Ext}(S)$ *est un domaine fondamental pour* $\langle S \rangle$. *Pour tout* $z \in \text{Ext}(S)$, *on a* $\text{Red}_S(\gamma) = 1$ *si et seulement si* $\gamma \in \langle S \rangle$.

Si un point z a un stabilisateur trivial, alors l'application orbitale $\gamma \mapsto \gamma \cdot z$ est une bijection.

Définition

Soit Γ un groupe fuchsien/kleinéen, $S \subset \Gamma$ et $z \in \mathcal{B}$. Un élément $\gamma \in \Gamma$ est (S,z)-réduit si $\gamma \cdot z$ est S-réduit, i.e. si $\gamma \cdot z \in \overline{\mathrm{Ext}(S)}$. On note $\mathrm{Red}_S(\gamma; z)$ l'élément réduit calculé par l'algorithme précédent, et simplement $\mathrm{Red}_S(\gamma) = \mathrm{Red}_S(\gamma; 0)$.

Proposition

Supposons que $\mathrm{Ext}(S)$ *est un domaine fondamental pour* $\langle S \rangle$. *Pour tout* $z \in \mathrm{Ext}(S)$, *on a* $\mathrm{Red}_S(\gamma) = 1$ *si et seulement si* $\gamma \in \langle S \rangle$.

Algorithme

faire

- Énumérer des éléments de Γ dans S
- $(S, 0)$-réduire les éléments de S
- Pour tout $z \in \mathrm{I}(\gamma)$ t.q. $\gamma \cdot z \notin \overline{\mathrm{Ext}(S)}$, ajouter $\mathrm{Red}_S(\gamma; z)$ à S

jusqu'à ce que $\mathrm{Vol}(\mathrm{Ext}(S)) = \mathrm{Covol}(\Gamma)$

Algorithme

faire

- Énumérer des éléments de Γ dans S
- $(S, 0)$-réduire les éléments de S
- Pour tout $z \in \mathrm{I}(\gamma)$ t.q. $\gamma \cdot z \notin \overline{\mathrm{Ext}(S)}$, ajouter $\mathrm{Red}_S(\gamma; z)$ à S

jusqu'à ce que $\mathrm{Vol}(\mathrm{Ext}(S)) = \mathrm{Covol}(\Gamma)$

Algorithme

faire

- Énumérer des éléments de Γ dans S
- $(S,0)$-réduire les éléments de S
- Pour tout $z \in \mathrm{I}(\gamma)$ t.q. $\gamma \cdot z \notin \overline{\mathrm{Ext}(S)}$, ajouter $\mathrm{Red}_S(\gamma; z)$ à S

jusqu'à ce que $\mathrm{Vol}(\mathrm{Ext}(S)) = \mathrm{Covol}(\Gamma)$

Algorithme

faire

- Énumérer des éléments de Γ dans S
- $(S,0)$-réduire les éléments de S
- Pour tout $z \in \mathrm{I}(\gamma)$ t.q. $\gamma \cdot z \notin \overline{\mathrm{Ext}(S)}$, ajouter $\mathrm{Red}_S(\gamma; z)$ à S

jusqu'à ce que $\mathrm{Vol}(\mathrm{Ext}(S)) = \mathrm{Covol}(\Gamma)$

On peut tenter d'expliquer en quoi ceci est plus efficace.

Algorithme modifié :

- ajout d'une étape technique ;
- pas d'énumération ;
- S initial donné en entrée ;
- test de volume $\rightarrow$ test purement géometrique.

Proposition

Si l'algorithme modifié termine, alors la sortie est un domaine de Dirichlet pour $\langle S\rangle$. Si à une étape de l'algorithme modifié, $\mathrm{Ext}(S)$ est compact, alors l'algorithme modifié termine.

On peut tenter d'expliquer en quoi ceci est plus efficace.
Algorithme modifié :

- ajout d'une étape technique ;
- pas d'énumération ;
- S initial donné en entrée ;
- test de volume $\to$ test purement géometrique.

Proposition

Si l'algorithme modifié termine, alors la sortie est un domaine de Dirichlet pour $\langle S \rangle$. Si à une étape de l'algorithme modifié, $\mathrm{Ext}(S)$ est compact, alors l'algorithme modifié termine.

On peut tenter d'expliquer en quoi ceci est plus efficace.
Algorithme modifié :

- ajout d'une étape technique ;
- pas d'énumération ;
- S initial donné en entrée ;
- test de volume $\to$ test purement géometrique.

Proposition

Si l'algorithme modifié termine, alors la sortie est un domaine de Dirichlet pour $\langle S \rangle$. Si à une étape de l'algorithme modifié, $\mathrm{Ext}(S)$ est compact, alors l'algorithme modifié termine.

On peut tenter d'expliquer en quoi ceci est plus efficace.
Algorithme modifié :

- ajout d'une étape technique ;
- pas d'énumération ;
- S initial donné en entrée ;
- test de volume $\to$ test purement géometrique.

Proposition

Si l'algorithme modifié termine, alors la sortie est un domaine de Dirichlet pour $\langle S \rangle$. Si à une étape de l'algorithme modifié, $\mathrm{Ext}(S)$ est compact, alors l'algorithme modifié termine.

Application : calcul de groupes d'unités dans une algèbre de quaternions.
Par exemple pour $\mathcal{O}$ maximal on utilise

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_F\mathcal{O}_1^\times \longrightarrow \mathcal{O}^\times \xrightarrow{\mathrm{nrd}} \mathbb{Z}_{F,+}^\times/\mathbb{Z}_F^{\times 2} \longrightarrow 1$$

où $\mathbb{Z}_{F,+}^\times = \{u \in \mathbb{Z}_F^\times \mid v(u) > 0$ pour tout place v réelle ramifiée$\}$.

Applications du cas fuchsien :

- Calcul du modèle complexe d'une variété de Shimura ;
- Calcul de formes modulaires de Hilbert par correspondance de Jacquet-Langlands.

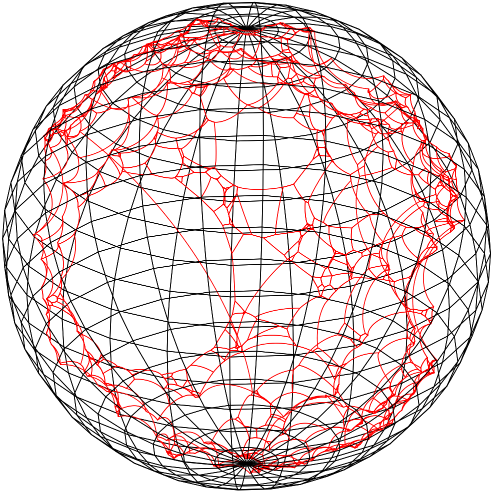
Applications du cas kleinéen :

- Expérimentation sur les variétés hyperboliques de dimension 3 ;
- Calcul de formes automorphes pour GL_2 sur des corps non totalement réels.

Proposition

Soit $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{11})$ *de discriminant* -3267, $\alpha = \sqrt[3]{11}$, $B = \left(\frac{-2,-4\alpha^2-\alpha-2}{F}\right)$, $\mathcal{O}$ *un ordre maximal dans* B. *L'algèbre de quaternions* B *est ramifiée exactement à la place réelle de* F *et en* $\mathfrak{p}_2$ *où* $\mathrm{N}(\mathfrak{p}_2) = 2$. *Le groupe* $\Gamma(\mathcal{O})$ *est de covolume fini* $\mathrm{Covol}(\Gamma) \approx 206.391784$, *et* Γ *admet une présentation avec* 17 *générateurs et* 32 *relations.*

Le polyèdre fondamental calculé a 647 faces et 1877 arêtes. Dans le réseau, 80 millions de vecteurs ont été énumérés, et 300 d'entre eux étaient de norme 1.



Merci !