Calculs de domaines fondamentaux de groupes arithmétiques I

Aurel Page

encadré par John Voight

8 décembre 2010

Définition

Soit F un corps avec car $F \neq 2$ et $a, b \in F^\times$. L'algèbre de quaternions $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ est la F-algèbre

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) = \langle i, j \mid i^2 = a,\ j^2 = b,\ ji = -ij \rangle$$

de dimension 4, munie d'une involution F-linéaire

$$\bar{\cdot} : x + yi + zj + tij \mapsto x - yi - zj - tij.$$

Tout élément $w \in \left(\frac{a,b}{F}\right)$ est annulé par le polynôme

$$(X - w)(X - \bar{w}) = X^2 - \mathrm{trd}(w)X + \mathrm{nrd}(w) \in F[X]$$

et la norme réduite nrd est multiplicative.

Définition

Soit F un corps avec car $F \neq 2$ et $a, b \in F^\times$. L'algèbre de quaternions $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ est la F-algèbre

$$\left(\frac{a, b}{F}\right) = \langle i, j \mid i^2 = a,\ j^2 = b,\ ji = -ij \rangle.$$

de dimension 4, munie d'une involution F-linéaire

$$\bar{\cdot} : x + yi + zj + tij \mapsto x - yi - zj - tij.$$

Tout élément $w \in \left(\frac{a,b}{F}\right)$ est annulé par le polynôme

$$(X - w)(X - \bar{w}) = X^2 - \mathrm{trd}(w)X + \mathrm{nrd}(w) \in F[X].$$

et la norme réduite nrd est multiplicative.

Définition

Soit F un corps avec car $F \neq 2$ et $a, b \in F^\times$. L'algèbre de quaternions $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ est la F-algèbre

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) = \langle i, j \mid i^2 = a,\ j^2 = b,\ ji = -ij \rangle.$$

de dimension 4, munie d'une involution F-linéaire

$$\bar{\cdot} : x + yi + zj + tij \mapsto x - yi - zj - tij.$$

Tout élément $w \in \left(\frac{a,b}{F}\right)$ est annulé par le polynôme

$$(X - w)(X - \bar{w}) = X^2 - \mathrm{trd}(w)X + \mathrm{nrd}(w) \in F[X].$$

et la norme réduite nrd est multiplicative.

Définition

Soit F un corps avec car $F \neq 2$ et $a, b \in F^\times$. L'algèbre de quaternions $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ est la F-algèbre

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) = \langle i,j \mid i^2 = a,\ j^2 = b,\ ji = -ij\rangle.$$

de dimension 4, munie d'une involution F-linéaire

$$\bar{\cdot} : x + yi + zj + tij \mapsto x - yi - zj - tij.$$

Tout élément $w \in \left(\frac{a,b}{F}\right)$ est annulé par le polynôme

$$(X - w)(X - \bar{w}) = X^2 - \operatorname{trd}(w)X + \operatorname{nrd}(w) \in F[X].$$

et la norme réduite nrd est multiplicative.

Définition

Soit F un corps avec car $F \neq 2$ et $a, b \in F^\times$. L'algèbre de quaternions $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ est la F-algèbre

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) = \langle i, j \mid i^2 = a,\ j^2 = b,\ ji = -ij\rangle$$

de dimension 4, munie d'une involution F-linéaire

$$\bar{\cdot} : x + yi + zj + tij \mapsto x - yi - zj - tij.$$

Tout élément $w \in \left(\frac{a,b}{F}\right)$ est annulé par le polynôme

$$(X - w)(X - \bar{w}) = X^2 - \mathrm{trd}(w)X + \mathrm{nrd}(w) \in F[X]$$

et la norme réduite nrd est multiplicative.

Exemples

- L'algèbre des matrices $\mathcal{M}_2(F)$ est isomorphe à $\left(\frac{1,1}{F}\right)$ via le morphisme d'algèbres

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto i \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto j.$$

  La trace réduite et la norme réduite sont respectivement la trace et le déterminant.
- L'anneau $\mathbb{H} = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ est une algèbre de quaternions à division sur $\mathbb{R}$. La norme réduite est le carré de la norme L^2 usuelle par rapport à la base $1, i, j, ij$.

Exemples

- L'algèbre des matrices $\mathcal{M}_2(F)$ est isomorphe à $\left(\frac{1,1}{F}\right)$ via le morphisme d'algèbres

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto i \ ; \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto j.$$

  La trace réduite et la norme réduite sont respectivement la trace et le déterminant.
- L'anneau $\mathbb{H} = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ est une algèbre de quaternions à division sur $\mathbb{R}$. La norme réduite est le carré de la norme L^2 usuelle par rapport à la base $1, i, j, ij$.

Proposition

Soit B une algèbre sur un corps F avec $\operatorname{char} F \neq 2$. *Sont équivalentes :*

i) *B est une algèbre de quaternions ;*
ii) *B est centrale simple de dimension* 4 *;*
iii) *B est centrale semi-simple de dimension* 4 *;*
iv) *B admet une involution standard non-dégénérée et n'est pas un corps.*

Proposition

Soit F un corps avec car $F \neq 2$ et $a, b \in F^\times$. On a alors

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{b,a}{F}\right) \cong \left(\frac{a,-ab}{F}\right).$$

Soient $u, v \in F^\times$, on a alors

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{u^2a, v^2b}{F}\right).$$

Une algèbre de quaternions B sur F est à division ssi $B \not\cong \mathcal{M}_2(F)$.

Corollaire

Les seules algèbres de quaternions sur $\mathbb{R}$ sont $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{H}$.
La seule algèbre de quaternions sur $\mathbb{C}$ est $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Proposition

Soit F un corps avec car $F \neq 2$ et $a, b \in F^\times$. On a alors

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{b,a}{F}\right) \cong \left(\frac{a,-ab}{F}\right).$$

Soient $u, v \in F^\times$, on a alors

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{u^2a,v^2b}{F}\right).$$

Une algèbre de quaternions B sur F est à division ssi $B \not\cong \mathcal{M}_2(F)$.

Corollaire

Les seules algèbres de quaternions sur $\mathbb{R}$ sont $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{H}$.
La seule algèbre de quaternions sur $\mathbb{C}$ est $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Proposition

Soit F un corps avec car $F \neq 2$ et $a, b \in F^\times$. On a alors

$$\left(\frac{a, b}{F}\right) \cong \left(\frac{b, a}{F}\right) \cong \left(\frac{a, -ab}{F}\right).$$

Soient $u, v \in F^\times$, on a alors

$$\left(\frac{a, b}{F}\right) \cong \left(\frac{u^2 a, v^2 b}{F}\right).$$

Une algèbre de quaternions B sur F est à division ssi $B \not\cong \mathcal{M}_2(F)$.

Corollaire

Les seules algèbres de quaternions sur $\mathbb{R}$ sont $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{H}$.
La seule algèbre de quaternions sur $\mathbb{C}$ est $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Proposition

Soit F un corps avec car $F \neq 2$ et $a, b \in F^\times$. On a alors

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{b,a}{F}\right) \cong \left(\frac{a,-ab}{F}\right).$$

Soient $u, v \in F^\times$, on a alors

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{u^2a,v^2b}{F}\right).$$

Une algèbre de quaternions B sur F est à division ssi $B \not\cong \mathcal{M}_2(F)$.

Corollaire

Les seules algèbres de quaternions sur $\mathbb{R}$ sont $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{H}$.

La seule algèbre de quaternions sur $\mathbb{C}$ est $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Proposition

Soit F un corps avec car $F \neq 2$ et $a, b \in F^\times$. On a alors

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{b,a}{F}\right) \cong \left(\frac{a,-ab}{F}\right).$$

Soient $u, v \in F^\times$, on a alors

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{u^2a, v^2b}{F}\right).$$

Une algèbre de quaternions B sur F est à division ssi $B \not\cong \mathcal{M}_2(F)$.

Corollaire

Les seules algèbres de quaternions sur $\mathbb{R}$ sont $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{H}$.

La seule algèbre de quaternions sur $\mathbb{C}$ est $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Proposition

Soit F un corps avec car $F \neq 2$ *et* $a, b \in F^\times$. *On a alors*

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{b,a}{F}\right) \cong \left(\frac{a,-ab}{F}\right).$$

Soient $u, v \in F^\times$, on a alors

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{u^2a,v^2b}{F}\right).$$

Une algèbre de quaternions B sur F est à division ssi $B \not\cong \mathcal{M}_2(F)$.

Corollaire

Les seules algèbres de quaternions sur $\mathbb{R}$ sont $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{H}$.
La seule algèbre de quaternions sur $\mathbb{C}$ est $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Proposition

Soit F un corps p-adique. Alors les seules algèbres de quaternions sur F à isomorphisme près sont

- $\mathcal{M}_2(F)$;
- $\left(\frac{K,\pi}{F}\right)$ *où K est l'unique extension quadratique non ramifiée de F et π est une uniformisante.*

Proposition

Soit F un corps p-adique. Alors les seules algèbres de quaternions sur F à isomorphisme près sont

- $\mathcal{M}_2(F)$;
- $\left(\frac{K,\pi}{F}\right)$ *où K est l'unique extension quadratique non ramifiée de F et π est une uniformisante.*

Proposition

Soit F un corps p-adique. Alors les seules algèbres de quaternions sur F à isomorphisme près sont

- $\mathcal{M}_2(F)$;
- $\left(\frac{K,\pi}{F}\right)$ *où K est l'unique extension quadratique non ramifiée de F et π est une uniformisante.*

Définition

Soit $B = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ une algèbre de quaternions sur un corps de nombres F. Une place v de F est décomposée ou ramifiée selon que $B \otimes_F F_v = \mathcal{M}_2(F_v)$ ou une algèbre à division, où F_v désigne la complétion de F en v. Le produit des idéaux premiers ramifiés est le discriminant Δ_B de B.

Théorème

Une algèbre de quaternions B sur un corps de nombres F est ramifiée en un nombre fini, pair de places de F. Pour tout sous-ensemble fini S des places non complexes de F, de cardinal pair, il existe une unique (à isomorphisme près) algèbre de quaternions sur F ramifiée exactement aux places de S.

Définition

Soit $B = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ une algèbre de quaternions sur un corps de nombres F. Une place v de F est décomposée ou ramifiée selon que $B \otimes_F F_v = \mathcal{M}_2(F_v)$ ou une algèbre à division, où F_v désigne la complétion de F en v. Le produit des idéaux premiers ramifiés est le discriminant Δ_B de B.

Théorème

Une algèbre de quaternions B sur un corps de nombres F est ramifiée en un nombre fini, pair de places de F. Pour tout sous-ensemble fini S des places non complexes de F, de cardinal pair, il existe une unique (à isomorphisme près) algèbre de quaternions sur F ramifiée exactement aux places de S.

Définition

Soit $B = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ une algèbre de quaternions sur un corps de nombres F. Une place v de F est décomposée ou ramifiée selon que $B \otimes_F F_v = \mathcal{M}_2(F_v)$ ou une algèbre à division, où F_v désigne la complétion de F en v. Le produit des idéaux premiers ramifiés est le discriminant Δ_B de B.

Théorème

Une algèbre de quaternions B sur un corps de nombres F est ramifiée en un nombre fini, pair de places de F. Pour tout sous-ensemble fini S des places non complexes de F, de cardinal pair, il existe une unique (à isomorphisme près) algèbre de quaternions sur F ramifiée exactement aux places de S.

Définition

Soit B une algèbre de quaternions sur un corps de nombres F de degré n et d'anneau des entiers $\mathbb{Z}_F$. Un ordre dans B est un $\mathbb{Z}_F$-module de type fini $\mathcal{O}$ tel que $F\mathcal{O} = B$ et qui est aussi un anneau unitaire. On note

$$\mathcal{O}_1^\times = \{w \in \mathcal{O} \mid \mathrm{nrd}(w) = 1\} \subset \mathcal{O}^\times.$$

Définition

Soit B une algèbre de quaternions sur un corps de nombres F de degré n et d'anneau des entiers $\mathbb{Z}_F$. Un ordre dans B est un $\mathbb{Z}_F$-module de type fini $\mathcal{O}$ tel que $F\mathcal{O} = B$ et qui est aussi un anneau unitaire. On note

$$\mathcal{O}_1^\times = \{w \in \mathcal{O} \mid \mathrm{nrd}(w) = 1\} \subset \mathcal{O}^\times.$$

Définition

Soit B une algèbre de quaternions sur un corps de nombres F de degré n et d'anneau des entiers $\mathbb{Z}_F$. Un ordre dans B est un $\mathbb{Z}_F$-module de type fini $\mathcal{O}$ tel que $F\mathcal{O} = B$ et qui est aussi un anneau unitaire. On note

$$\mathcal{O}_1^\times = \{w \in \mathcal{O} \mid \operatorname{nrd}(w) = 1\} \subset \mathcal{O}^\times.$$

Soit $F_{\mathbb{R}} = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et $B_{\mathbb{R}} = B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et on considère le plongement

$$\iota : B \hookrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

Alors pour tout ordre $\mathcal{O}$, $\iota(\mathcal{O}) \subset B_{\mathbb{R}}$ est un réseau. On prolonge $\mathrm{nrd} : B \to F$ en $\mathrm{nrd} : B_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}$ et on pose

$$B_{\mathbb{R},1}^{\times} = \{w \in B_{\mathbb{R}} \mid \mathrm{nrd}(w) = 1\}.$$

On a l'isomorphisme

$$B_{\mathbb{R},1}^{\times} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^d \times (\mathbb{H}_1^{\times})^{r-d} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^c$$

où r est le nombre de places réelles de F, d le nombre de places réelles décomposées et c le nombre de places complexes.

Soit $F_{\mathbb{R}} = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et $B_{\mathbb{R}} = B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et on considère le plongement

$$\iota : B \hookrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

Alors pour tout ordre $\mathcal{O}$, $\iota(\mathcal{O}) \subset B_{\mathbb{R}}$ est un réseau. On prolonge nrd : $B \to F$ en nrd : $B_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}$ et on pose

$$B^{\times}_{\mathbb{R},1} = \{w \in B_{\mathbb{R}} \mid \mathrm{nrd}(w) = 1\}.$$

On a l'isomorphisme

$$B^{\times}_{\mathbb{R},1} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^d \times (\mathbb{H}^{\times}_1)^{r-d} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^c$$

où r est le nombre de places réelles de F, d le nombre de places réelles décomposées et c le nombre de places complexes.

Soit $F_{\mathbb{R}} = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et $B_{\mathbb{R}} = B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et on considère le plongement

$$\iota : B \hookrightarrow B_{\mathbb{R}}.$$

Alors pour tout ordre $\mathcal{O}$, $\iota(\mathcal{O}) \subset B_{\mathbb{R}}$ est un réseau. On prolonge nrd : $B \to F$ en nrd : $B_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}$ et on pose

$$B_{\mathbb{R},1}^{\times} = \{w \in B_{\mathbb{R}} \mid \mathrm{nrd}(w) = 1\}.$$

On a l'isomorphisme

$$B_{\mathbb{R},1}^{\times} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^d \times (\mathbb{H}_1^{\times})^{r-d} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^c$$

où r est le nombre de places réelles de F, d le nombre de places réelles décomposées et c le nombre de places complexes.

Soit $F_\mathbb{R} = F \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$ et $B_\mathbb{R} = B \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$ et on considère le plongement

$$\iota : B \hookrightarrow B_\mathbb{R}.$$

Alors pour tout ordre $\mathcal{O}$, $\iota(\mathcal{O}) \subset B_\mathbb{R}$ est un réseau. On prolonge $\mathrm{nrd} : B \to F$ en $\mathrm{nrd} : B_\mathbb{R} \to F_\mathbb{R}$ et on pose

$$B^\times_{\mathbb{R},1} = \{w \in B_\mathbb{R} \mid \mathrm{nrd}(w) = 1\}.$$

On a l'isomorphisme

$$B^\times_{\mathbb{R},1} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^d \times (\mathbb{H}_1^\times)^{r-d} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^c$$

où r est le nombre de places réelles de F, d le nombre de places réelles décomposées et c le nombre de places complexes.

Théorème

Soit B une algèbre de quaternions sur un corps de nombres F et $\mathcal{O}$ un ordre dans B. Alors $\mathcal{O}_1^\times$ est un sous-groupe discret, de covolume fini dans $B_{\mathbb{R},1}^\times$. De plus $\mathcal{O}_1^\times$ est cocompact ssi B est une algèbre à division.

Définition

Un corps de nombres est dit ATR (almost totally real) s'il admet exactement une place complexe. Une algèbre de quaternions sur un corps totalement réel est fuchsienne si elle est ramifiée à toutes les places réelles sauf une. Une algèbre de quaternions sur un corps ATR est kleinéenne si elle est ramifiée à toutes les places réelles.

Corollaire

Si $\mathcal{O}$ est un ordre dans une algèbre de quaternions B fuchsienne (resp. kleinéenne), alors $\mathcal{O}_1^\times$ est un groupe discret, de covolume fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$), cocompact ssi l'algèbre n'est pas isomorphe à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ (resp. $\mathcal{M}_2(F)$ où F est quadratique imaginaire).

Définition

Un corps de nombres est dit ATR (almost totally real) s'il admet exactement une place complexe. Une algèbre de quaternions sur un corps totalement réel est fuchsienne si elle est ramifiée à toutes les places réelles sauf une. Une algèbre de quaternions sur un corps ATR est kleinéenne si elle est ramifiée à toutes les places réelles.

Corollaire

Si $\mathcal{O}$ est un ordre dans une algèbre de quaternions B fuchsienne (resp. kleinéenne), alors $\mathcal{O}_1^\times$ est un groupe discret, de covolume fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$), cocompact ssi l'algèbre n'est pas isomorphe à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ (resp. $\mathcal{M}_2(F)$ où F est quadratique imaginaire).

Définition

Le demi-plan de Poincaré est l'ensemble
$\mathcal{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ muni de la métrique

$$d\ell^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

et de l'aire μ donnée par

$$dS = \frac{dx\, dy}{y^2}$$

où $z \in \mathcal{H}^2$, $z = x + yi$ and $y > 0$.

Définition

Le demi-plan de Poincaré est l'ensemble $\mathcal{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ muni de la métrique

$$d\ell^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

et de l'aire μ donnée par

$$dS = \frac{dx\,dy}{y^2}$$

où $z \in \mathcal{H}^2$, $z = x + yi$ and $y > 0$.

Définition

Le demi-plan de Poincaré est l'ensemble $\mathcal{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ muni de la métrique

$$d\ell^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

et de l'aire μ donnée par

$$dS = \frac{dx\,dy}{y^2}$$

où $z \in \mathcal{H}^2$, $z = x + yi$ and $y > 0$.

Définition

Le demi-espace de Poincaré est l'ensemble $\mathcal{H}^3 = \{w = z + tj \in \mathbb{C} + \mathbb{R}j \subset \mathbb{H} \mid t > 0\}$ muni de la métrique

$$d\ell^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2}$$

et du volume Vol donné par

$$dV = \frac{dx\,dy\,dt}{t^3}$$

où $w \in \mathcal{H}^3$, $w = x + yi + tj$ and $t > 0$.

Définition

Le demi-espace de Poincaré est l'ensemble $\mathcal{H}^3 = \{w = z + tj \in \mathbb{C} + \mathbb{R}j \subset \mathbb{H} \mid t > 0\}$ muni de la métrique

$$d\ell^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2}$$

et du volume Vol donné par

$$dV = \frac{dx\,dy\,dt}{t^3}$$

où $w \in \mathcal{H}^3$, $w = x + yi + tj$ and $t > 0$.

Définition

Le demi-espace de Poincaré est l'ensemble $\mathcal{H}^3 = \{w = z + tj \in \mathbb{C} + \mathbb{R}j \subset \mathbb{H} \mid t > 0\}$ muni de la métrique

$$d\ell^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2}$$

et du volume Vol donné par

$$dV = \frac{dx\,dy\,dt}{t^3}$$

où $w \in \mathcal{H}^3$, $w = x + yi + tj$ and $t > 0$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^2$ par homographies

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour tout } z \in \mathcal{H}^2 \text{ et } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^2)$. Le stabilisateur du point $i \in \mathcal{H}^2$ est le groupe compact $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^3$ par

$$g \cdot w = (aw+b)(cw+d)^{-1} \text{ pour tout } w \in \mathcal{H}^3 \text{ et } g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^3)$. Le stabilisateur du point $j \in \mathcal{H}^3$ est le groupe compact $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^2$ par homographies

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour tout } z \in \mathcal{H}^2 \text{ et } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^2)$. Le stabilisateur du point $i \in \mathcal{H}^2$ est le groupe compact $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^3$ par

$$g \cdot w = (aw+b)(cw+d)^{-1} \text{ pour tout } w \in \mathcal{H}^3 \text{ et } g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^3)$. Le stabilisateur du point $j \in \mathcal{H}^3$ est le groupe compact $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^2$ par homographies

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour tout } z \in \mathcal{H}^2 \text{ et } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^2)$. Le stabilisateur du point $i \in \mathcal{H}^2$ est le groupe compact $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^3$ par

$$g \cdot w = (aw+b)(cw+d)^{-1} \text{ pour tout } w \in \mathcal{H}^3 \text{ et } g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^3)$. Le stabilisateur du point $j \in \mathcal{H}^3$ est le groupe compact $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^2$ par homographies

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour tout } z \in \mathcal{H}^2 \text{ et } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^2)$. Le stabilisateur du point $i \in \mathcal{H}^2$ est le groupe compact $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^3$ par

$$g \cdot w = (aw+b)(cw+d)^{-1} \text{ pour tout } w \in \mathcal{H}^3 \text{ et } g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^3)$. Le stabilisateur du point $j \in \mathcal{H}^3$ est le groupe compact $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^2$ par homographies

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour tout } z \in \mathcal{H}^2 \text{ et } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^2)$. Le stabilisateur du point $i \in \mathcal{H}^2$ est le groupe compact $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^3$ par

$$g \cdot w = (aw+b)(cw+d)^{-1} \text{ pour tout } w \in \mathcal{H}^3 \text{ et } g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^3)$. Le stabilisateur du point $j \in \mathcal{H}^3$ est le groupe compact $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^2$ par homographies

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour tout } z \in \mathcal{H}^2 \text{ et } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^2)$. Le stabilisateur du point $i \in \mathcal{H}^2$ est le groupe compact $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^3$ par

$$g \cdot w = (aw+b)(cw+d)^{-1} \text{ pour tout } w \in \mathcal{H}^3 \text{ et } g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^3)$. Le stabilisateur du point $j \in \mathcal{H}^3$ est le groupe compact $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^2$ par homographies

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour tout } z \in \mathcal{H}^2 \text{ et } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^2)$. Le stabilisateur du point $i \in \mathcal{H}^2$ est le groupe compact $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^3$ par

$$g \cdot w = (aw+b)(cw+d)^{-1} \text{ pour tout } w \in \mathcal{H}^3 \text{ et } g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^3)$. Le stabilisateur du point $j \in \mathcal{H}^3$ est le groupe compact $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^2$ par homographies

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ pour tout } z \in \mathcal{H}^2 \text{ et } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^2)$. Le stabilisateur du point $i \in \mathcal{H}^2$ est le groupe compact $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathcal{H}^3$ par

$$g \cdot w = (aw+b)(cw+d)^{-1} \text{ pour tout } w \in \mathcal{H}^3 \text{ et } g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

qui induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ et $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{H}^3)$. Le stabilisateur du point $j \in \mathcal{H}^3$ est le groupe compact $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Classification des éléments $\gamma \neq 1 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$:

- $\mathrm{tr}(\gamma) \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$: γ est hyperbolique/loxodromique.
- $\mathrm{tr}(\gamma) \in (-2, 2)$: γ est elliptique.
- $\mathrm{tr}(\gamma) = \pm 2$: γ est parabolique.

Classification des éléments $\gamma \neq 1 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$:

- $\mathrm{tr}(\gamma) \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$: γ est hyperbolique/loxodromique.
- $\mathrm{tr}(\gamma) \in (-2, 2)$: γ est elliptique.
- $\mathrm{tr}(\gamma) = \pm 2$: γ est parabolique.

Classification des éléments $\gamma \neq 1 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$:

- $\mathrm{tr}(\gamma) \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$: γ est hyperbolique/loxodromique.
- $\mathrm{tr}(\gamma) \in (-2, 2)$: γ est elliptique.
- $\mathrm{tr}(\gamma) = \pm 2$: γ est parabolique.

Classification des éléments $\gamma \neq 1 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$:

- $\mathrm{tr}(\gamma) \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$: γ est hyperbolique/loxodromique.
- $\mathrm{tr}(\gamma) \in (-2, 2)$: γ est elliptique.
- $\mathrm{tr}(\gamma) = \pm 2$: γ est parabolique.

Définition

Un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Un tel groupe Γ est cocompact si $\Gamma\backslash\mathcal{H}^2$ (resp. $\Gamma\backslash\mathcal{H}^3$) est compact ; il est de coaire finie (resp. de covolume fini) si $\mu(\Gamma\backslash\mathcal{H}^2) < \infty$ (resp. $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathcal{H}^3) < \infty$).

Définition

Un groupe fuchsien (resp. kleinéen) est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$). Un tel groupe Γ est cocompact si $\Gamma\backslash\mathcal{H}^2$ (resp. $\Gamma\backslash\mathcal{H}^3$) est compact ; il est de coaire finie (resp. de covolume fini) si $\mu(\Gamma\backslash\mathcal{H}^2) < \infty$ (resp. $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathcal{H}^3) < \infty$).

Définition

Un groupe fuchsien (resp. kleinéen) est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$). Un tel groupe Γ est cocompact si $\Gamma\backslash\mathcal{H}^2$ (resp. $\Gamma\backslash\mathcal{H}^3$) est compact ; il est de coaire finie (resp. de covolume fini) si $\mu(\Gamma\backslash\mathcal{H}^2) < \infty$ (resp. $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathcal{H}^3) < \infty$).

Définition

Un groupe fuchsien (resp. kleinéen) est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$). Un tel groupe Γ est cocompact si $\Gamma\backslash\mathcal{H}^2$ (resp. $\Gamma\backslash\mathcal{H}^3$) est compact ; il est de coaire finie (resp. de covolume fini) si $\mu(\Gamma\backslash\mathcal{H}^2) < \infty$ (resp. $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\mathcal{H}^3) < \infty$).

Définition

Un ouvert connexe $\mathcal{F} \subset X$ avec $X = \mathcal{H}^2$ (resp. $X = \mathcal{H}^3$) est un domaine fondamental pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ si

(i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot \overline{\mathcal{F}} = X$;

(ii) Pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$, $\mathcal{F} \cap \gamma \cdot \mathcal{F} = \varnothing$;

(iii) $\mu(\partial \mathcal{F}) = 0$ (resp. $\mathrm{Vol}(\partial \mathcal{F}) = 0$)

où $\partial \mathcal{F}$ désigne la frontière de $\mathcal{F}$.

Définition

Un ouvert connexe $\mathcal{F} \subset X$ avec $X = \mathcal{H}^2$ (resp. $X = \mathcal{H}^3$) est un domaine fondamental pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ si

(i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot \overline{\mathcal{F}} = X$;

(ii) Pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$, $\mathcal{F} \cap \gamma \cdot \mathcal{F} = \varnothing$;

(iii) $\mu(\partial \mathcal{F}) = 0$ (resp. $\mathrm{Vol}(\partial \mathcal{F}) = 0$)

où $\partial \mathcal{F}$ désigne la frontière de $\mathcal{F}$.

Définition

Un ouvert connexe $\mathcal{F} \subset X$ avec $X = \mathcal{H}^2$ (resp. $X = \mathcal{H}^3$) est un domaine fondamental pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ si

(i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot \overline{\mathcal{F}} = X$;

(ii) Pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$, $\mathcal{F} \cap \gamma \cdot \mathcal{F} = \varnothing$;

(iii) $\mu(\partial \mathcal{F}) = 0$ (resp. $\mathrm{Vol}(\partial \mathcal{F}) = 0$)

où $\partial \mathcal{F}$ désigne la frontière de $\mathcal{F}$.

Définition

Un ouvert connexe $\mathcal{F} \subset X$ avec $X = \mathcal{H}^2$ (resp. $X = \mathcal{H}^3$) est un domaine fondamental pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ si

(i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot \overline{\mathcal{F}} = X$;

(ii) Pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$, $\mathcal{F} \cap \gamma \cdot \mathcal{F} = \varnothing$;

(iii) $\mu(\partial \mathcal{F}) = 0$ (resp. $\mathrm{Vol}(\partial \mathcal{F}) = 0$)

où $\partial \mathcal{F}$ désigne la frontière de $\mathcal{F}$.

Proposition

Soit Γ un groupe fuchsien (resp. kleinéen). Soit $p \in X$ un point dont le stabilisateur dans Γ est trivial. Alors l'ensemble

$$D_p(\Gamma) = \{x \in X \mid \textit{for all } \gamma \in \Gamma \setminus \{1\},\ \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(\gamma \cdot x, p)\}$$

est un domaine fondamental pour Γ. Si Γ est de coaire (resp. covolume) finie, alors $D_p(\Gamma)$ est un polygone (resp. un polyèdre).

Définition

Le domaine $D_p(\Gamma)$ est un domaine de Dirichlet pour Γ.

Proposition

Soit Γ un groupe fuchsien (resp. kleinéen). Soit $p \in X$ un point dont le stabilisateur dans Γ est trivial. Alors l'ensemble

$$D_p(\Gamma) = \{x \in X \mid \textit{for all } \gamma \in \Gamma \setminus \{1\},\ \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(\gamma \cdot x, p)\}$$

est un domaine fondamental pour Γ. Si Γ est de coaire (resp. covolume) finie, alors $D_p(\Gamma)$ est un polygone (resp. un polyèdre).

Définition

Le domaine $D_p(\Gamma)$ est un domaine de Dirichlet pour Γ.

Proposition

Soit Γ un groupe fuchsien (resp. kleinéen). Soit $p \in X$ un point dont le stabilisateur dans Γ est trivial. Alors l'ensemble

$$D_p(\Gamma) = \{x \in X \mid \textit{for all } \gamma \in \Gamma \setminus \{1\},\ \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(\gamma \cdot x, p)\}$$

est un domaine fondamental pour Γ. Si Γ est de coaire (resp. covolume) finie, alors $D_p(\Gamma)$ est un polygone (resp. un polyèdre).

Définition

Le domaine $D_p(\Gamma)$ est un domaine de Dirichlet pour Γ.

Proposition

Soit Γ un groupe fuchsien (resp. kleinéen). Soit $p \in X$ un point dont le stabilisateur dans Γ est trivial. Alors l'ensemble

$$D_p(\Gamma) = \{x \in X \mid \textit{for all } \gamma \in \Gamma \setminus \{1\},\ \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(\gamma \cdot x, p)\}$$

est un domaine fondamental pour Γ. Si Γ est de coaire (resp. covolume) finie, alors $D_p(\Gamma)$ est un polygone (resp. un polyèdre).

Définition

Le domaine $D_p(\Gamma)$ est un domaine de Dirichlet pour Γ.

Définition

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ, et C l'ensemble des côtés (resp. faces) de $\mathcal{F}$. Un couplage est une application $\cdot^* \times g : C \to C \times \Gamma$ qui à chaque côté/face c associe un côté/face c^* et un élément $g(c) \in \Gamma$ t.q.

(a) $g(c) \cdot c = c^*$;

(b) $\cdot^* : C \to C$ est une involution ;

Les éléments $g(c)$ où c est un côté/face de $\mathcal{F}$ sont les transformations du couplage.

Définition

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ, et C l'ensemble des côtés (resp. faces) de $\mathcal{F}$. Un couplage est une application $\cdot^* \times g : C \to C \times \Gamma$ qui à chaque côté/face c associe un côté/face c^* et un élément $g(c) \in \Gamma$ t.q.

(a) $g(c) \cdot c = c^*$;

(b) $\cdot^* : C \to C$ est une involution ;

Les éléments $g(c)$ où c est un côté/face de $\mathcal{F}$ sont les transformations du couplage.

Définition

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ, et C l'ensemble des côtés (resp. faces) de $\mathcal{F}$. Un couplage est une application $\cdot^* \times g : C \to C \times \Gamma$ qui à chaque côté/face c associe un côté/face c^* et un élément $g(c) \in \Gamma$ t.q.

(a) $g(c) \cdot c = c^*$;

(b) $\cdot^* : C \to C$ est une involution ;

Les éléments $g(c)$ où c est un côté/face de $\mathcal{F}$ sont les transformations du couplage.

Définition

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ, et C l'ensemble des côtés (resp. faces) de $\mathcal{F}$. Un couplage est une application $\cdot^* \times g : C \to C \times \Gamma$ qui à chaque côté/face c associe un côté/face c^* et un élément $g(c) \in \Gamma$ t.q.

(a) $g(c) \cdot c = c^*$;

(b) $\cdot^* : C \to C$ est une involution ;

Les éléments $g(c)$ où c est un côté/face de $\mathcal{F}$ sont les transformations du couplage.

Proposition

Tout domaine de Dirichlet admet un couplage. Les transformations du couplage engendrent le groupe Γ.

Définition (Cycles)

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ de coaire/covolume finie. On définit par récurrence :

- Soit s_1 un sommet/arête de $\mathcal{F}$;
- $s_1 = c \cap c_1$;
- $g_1 = g(c_1)$;
- $s_{i+1} = g_i \cdot s_i$;
- $s_{i+1} = c_{i+1} \cap c_i^*$;
- $g_{i+1} = g(c_{i+1})$, etc.

La suite (s_i) est périodique ; soit m sa période. $C = (s_1, \ldots, s_m)$ est un cycle de sommets/arêtes. La transformation de cycle en s_1 est $h = g_m g_{m-1} \cdots g_1$.

Définition (Cycles)

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ de coaire/covolume finie. On définit par récurrence :

- Soit s_1 un sommet/arête de $\mathcal{F}$;
- $s_1 = c \cap c_1$;
- $g_1 = g(c_1)$;
- $s_{i+1} = g_i \cdot s_i$;
- $s_{i+1} = c_{i+1} \cap c_i^*$;
- $g_{i+1} = g(c_{i+1})$, etc.

La suite (s_i) est périodique ; soit m sa période. $C = (s_1, \ldots, s_m)$ est un cycle de sommets/arêtes. La transformation de cycle en s_1 est $h = g_m g_{m-1} \cdots g_1$.

Définition (Cycles)

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ de coaire/covolume finie. On définit par récurrence :

- Soit s_1 un sommet/arête de $\mathcal{F}$;
- $s_1 = c \cap c_1$;
- $g_1 = g(c_1)$;
- $s_{i+1} = g_i \cdot s_i$;
- $s_{i+1} = c_{i+1} \cap c_i^*$;
- $g_{i+1} = g(c_{i+1})$, etc.

La suite (s_i) est périodique ; soit m sa période. $C = (s_1, \ldots, s_m)$ est un cycle de sommets/arêtes. La transformation de cycle en s_1 est $h = g_m g_{m-1} \ldots g_1$.

Définition (Cycles)

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ de coaire/covolume finie. On définit par récurrence :

- Soit s_1 un sommet/arête de $\mathcal{F}$;
- $s_1 = c \cap c_1$;
- $g_1 = g(c_1)$;
- $s_{i+1} = g_i \cdot s_i$;
- $s_{i+1} = c_{i+1} \cap c_i^*$;
- $g_{i+1} = g(c_{i+1})$, etc.

La suite (s_i) est périodique ; soit m sa période. $C = (s_1, \ldots, s_m)$ est un cycle de sommets/arêtes. La transformation de cycle en s_1 est $h = g_m g_{m-1} \cdots g_1$.

Définition (Cycles)

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ de coaire/covolume finie. On définit par récurrence :

- Soit s_1 un sommet/arête de $\mathcal{F}$;
- $s_1 = c \cap c_1$;
- $g_1 = g(c_1)$;
- $s_{i+1} = g_i \cdot s_i$;
- $s_{i+1} = c_{i+1} \cap c_i^*$;
- $g_{i+1} = g(c_{i+1})$, etc.

La suite (s_i) est périodique ; soit m sa période. $C = (s_1, \ldots, s_m)$ est un cycle de sommets/arêtes. La transformation de cycle en s_1 est $h = g_m g_{m-1} \cdots g_1$.

Définition (Cycles)

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ de coaire/covolume finie. On définit par récurrence :

- Soit s_1 un sommet/arête de $\mathcal{F}$;
- $s_1 = c \cap c_1$;
- $g_1 = g(c_1)$;
- $s_{i+1} = g_i \cdot s_i$;
- $s_{i+1} = c_{i+1} \cap c_i^*$;
- $g_{i+1} = g(c_{i+1})$, etc.

La suite (s_i) est périodique ; soit m sa période. $C = (s_1, \ldots, s_m)$ est un cycle de sommets/arêtes. La transformation de cycle en s_1 est $h = g_m g_{m-1} \cdots g_1$.

Définition (Cycles)

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ de coaire/covolume finie. On définit par récurrence :

- Soit s_1 un sommet/arête de $\mathcal{F}$;
- $s_1 = c \cap c_1$;
- $g_1 = g(c_1)$;
- $s_{i+1} = g_i \cdot s_i$;
- $s_{i+1} = c_{i+1} \cap c_i^*$;
- $g_{i+1} = g(c_{i+1})$, etc.

La suite (s_i) est périodique ; soit m sa période. $C = (s_1, \ldots, s_m)$ est un cycle de sommets/arêtes. La transformation de cycle en s_1 est $h = g_m g_{m-1} \cdots g_1$.

Définition (Cycles)

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinéen) Γ de coaire/covolume finie. On définit par récurrence :

- Soit s_1 un sommet/arête de $\mathcal{F}$;
- $s_1 = c \cap c_1$;
- $g_1 = g(c_1)$;
- $s_{i+1} = g_i \cdot s_i$;
- $s_{i+1} = c_{i+1} \cap c_i^*$;
- $g_{i+1} = g(c_{i+1})$, etc.

La suite (s_i) est périodique ; soit m sa période. $C = (s_1, \ldots, s_m)$ est un cycle de sommets/arêtes. La transformation de cycle en s_1 est $h = g_m g_{m-1} \ldots g_1$.

Proposition

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinén) Γ de coaire/covolume fini.

- *Si un côté/face c vérifie $c^* = c$, alors on a la relation de réflexion $g(c)^2 = 1$;*
- *Pour tout sommet/arête s de transformation de cycle h et pour tout $x \in s$ on a $h \cdot x = x$; h satisfait une relation de cycle $h^\nu = 1$.*

Les relations de réflexion et les relations de cycle forment un ensemble complet de relations pour Γ.

Proposition

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinén) Γ de coaire/covolume fini.

- *Si un côté/face c vérifie $c^* = c$, alors on a la relation de réflexion $g(c)^2 = 1$;*
- *Pour tout sommet/arête s de transformation de cycle h et pour tout $x \in s$ on a $h \cdot x = x$; h satisfait une relation de cycle $h^\nu = 1$.*

Les relations de réflexion et les relations de cycle forment un ensemble complet de relations pour Γ.

Proposition

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinén) Γ de coaire/covolume fini.

- *Si un côté/face c vérifie $c^* = c$, alors on a la relation de réflexion $g(c)^2 = 1$;*
- *Pour tout sommet/arête s de transformation de cycle h et pour tout $x \in s$ on a $h \cdot x = x$; h satisfait une relation de cycle $h^\nu = 1$.*

Les relations de réflexion et les relations de cycle forment un ensemble complet de relations pour Γ.

Proposition

Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien (resp. kleinén) Γ de coaire/covolume fini.

- *Si un côté/face c vérifie $c^* = c$, alors on a la relation de réflexion $g(c)^2 = 1$;*
- *Pour tout sommet/arête s de transformation de cycle h et pour tout $x \in s$ on a $h \cdot x = x$; h satisfait une relation de cycle $h^\nu = 1$.*

Les relations de réflexion et les relations de cycle forment un ensemble complet de relations pour Γ.

Théorème

Soit B une F-algèbre de quaternions fuchsienne et $\mathcal{O}$ un ordre dans B. Alors le groupe fuchsien $\Gamma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1^\times/\{\pm 1\}$ est de coaire finie. $\Gamma(\mathcal{O})$ est cocompact ssi B est une algèbre à division, ssi $B \not\cong \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de B, alors

$$\mu(\Gamma(\mathcal{O})\backslash\mathcal{H}^2) = \frac{4|\Delta_F|^{3/2}\zeta_F(2)\Phi(\Delta_B)}{(4\pi^2)^n}$$

où Δ_F est le discriminant de F, n son degré, ζ_F est la fonction zêta de Dedekind de F, Δ_B est le discriminant de B et

$$\Phi(\mathfrak{a}) = N\mathfrak{a}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}}(1 - N\mathfrak{p}^{-1}).$$

Théorème

Soit B une F-algèbre de quaternions fuchsienne et $\mathcal{O}$ un ordre dans B. Alors le groupe fuchsien $\Gamma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1^\times/\{\pm 1\}$ est de coaire finie. $\Gamma(\mathcal{O})$ est cocompact ssi B est une algèbre à division, ssi $B \not\cong \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de B, alors

$$\mu(\Gamma(\mathcal{O})\backslash\mathcal{H}^2) = \frac{4|\Delta_F|^{3/2}\zeta_F(2)\Phi(\Delta_B)}{(4\pi^2)^n}$$

où Δ_F est le discriminant de F, n son degré, ζ_F est la fonction zêta de Dedekind de F, Δ_B est le discriminant de B et

$$\Phi(\mathfrak{a}) = N\mathfrak{a}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}}(1 - N\mathfrak{p}^{-1}).$$

Théorème

Soit B une F-algèbre de quaternions fuchsienne et $\mathcal{O}$ un ordre dans B. Alors le groupe fuchsien $\Gamma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1^\times/\{\pm 1\}$ est de coaire finie. $\Gamma(\mathcal{O})$ est cocompact ssi B est une algèbre à division, ssi $B \ncong \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de B, alors

$$\mu(\Gamma(\mathcal{O})\backslash\mathcal{H}^2) = \frac{4|\Delta_F|^{3/2}\zeta_F(2)\Phi(\Delta_B)}{(4\pi^2)^n}$$

où Δ_F est le discriminant de F, n son degré, ζ_F est la fonction zêta de Dedekind de F, Δ_B est le discriminant de B et

$$\Phi(\mathfrak{a}) = N\mathfrak{a}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}}(1 - N\mathfrak{p}^{-1}).$$

Théorème

Soit B une F-algèbre de quaternions fuchsienne et $\mathcal{O}$ un ordre dans B. Alors le groupe fuchsien $\Gamma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1^\times/\{\pm 1\}$ est de coaire finie. $\Gamma(\mathcal{O})$ est cocompact ssi B est une algèbre à division, ssi $B \not\cong \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de B, alors

$$\mu(\Gamma(\mathcal{O})\backslash\mathcal{H}^2) = \frac{4|\Delta_F|^{3/2}\zeta_F(2)\Phi(\Delta_B)}{(4\pi^2)^n}$$

où Δ_F est le discriminant de F, n son degré, ζ_F est la fonction zêta de Dedekind de F, Δ_B est le discriminant de B et

$$\Phi(\mathfrak{a}) = N\mathfrak{a}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}}(1 - N\mathfrak{p}^{-1}).$$

Théorème

Soit B une F-algèbre de quaternions kleinéenne et $\mathcal{O}$ un ordre dans B. Alors le groupe kleinéen $\Gamma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1^\times/\{\pm 1\}$ est de covolume fini. $\Gamma(\mathcal{O})$ est cocompact ssi B est une algèbre à division, ssi $B \not\cong \mathcal{M}_2(F)$ avec F imaginaire quadratique. Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de B, alors

$$\mathrm{Covol}(\Gamma) = \frac{|\Delta_F|^{3/2}\zeta_F(2)\Phi(\Delta_B)}{(4\pi^2)^{n-1}}$$

où Δ_F est le discriminant de F, n son degré, ζ_F est la fonction zêta de Dedekind de F, Δ_B est le discriminant de B et

$$\Phi(\mathfrak{a}) = N\mathfrak{a}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}}(1 - N\mathfrak{p}^{-1}).$$

Théorème

Soit B une F-algèbre de quaternions kleinéenne et $\mathcal{O}$ un ordre dans B. Alors le groupe kleinéen $\Gamma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1^\times/\{\pm 1\}$ est de covolume fini. $\Gamma(\mathcal{O})$ est cocompact ssi B est une algèbre à division, ssi $B \not\cong \mathcal{M}_2(F)$ avec F imaginaire quadratique. Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de B, alors

$$\mathrm{Covol}(\Gamma) = \frac{|\Delta_F|^{3/2}\zeta_F(2)\Phi(\Delta_B)}{(4\pi^2)^{n-1}}$$

où Δ_F est le discriminant de F, n son degré, ζ_F est la fonction zêta de Dedekind de F, Δ_B est le discriminant de B et

$$\Phi(\mathfrak{a}) = N\mathfrak{a}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}}(1 - N\mathfrak{p}^{-1}).$$

Théorème

Soit B une F-algèbre de quaternions kleinéenne et $\mathcal{O}$ un ordre dans B. Alors le groupe kleinéen $\Gamma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1^\times/\{\pm 1\}$ est de covolume fini. $\Gamma(\mathcal{O})$ est cocompact ssi B est une algèbre à division, ssi $B \ncong \mathcal{M}_2(F)$ avec F imaginaire quadratique. Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de B, alors

$$\mathrm{Covol}(\Gamma) = \frac{|\Delta_F|^{3/2}\zeta_F(2)\Phi(\Delta_B)}{(4\pi^2)^{n-1}}$$

où Δ_F est le discriminant de F, n son degré, ζ_F est la fonction zêta de Dedekind de F, Δ_B est le discriminant de B et

$$\Phi(\mathfrak{a}) = N\mathfrak{a}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}}(1 - N\mathfrak{p}^{-1}).$$

Théorème

Soit B une F-algèbre de quaternions kleinéenne et $\mathcal{O}$ un ordre dans B. Alors le groupe kleinéen $\Gamma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1^\times/\{\pm 1\}$ est de covolume fini. $\Gamma(\mathcal{O})$ est cocompact ssi B est une algèbre à division, ssi $B \ncong \mathcal{M}_2(F)$ avec F imaginaire quadratique. Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de B, alors

$$\mathrm{Covol}(\Gamma) = \frac{|\Delta_F|^{3/2}\zeta_F(2)\Phi(\Delta_B)}{(4\pi^2)^{n-1}}$$

où Δ_F est le discriminant de F, n son degré, ζ_F est la fonction zêta de Dedekind de F, Δ_B est le discriminant de B et

$$\Phi(\mathfrak{a}) = N\mathfrak{a}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}}(1 - N\mathfrak{p}^{-1}).$$

Merci de votre attention, la suite cet après-midi !