Attaque par filtration de McEliece basé sur des codes de Goppa sauvages sur des extensions quadratiques

Alain Couvreur, Ayoub Otmani, Jean-Pierre Tillich

LIX, École Polytechnique – LITIS, Université de Rouen – INRIA

Séminaire LFANT, Université de Bordeaux

Plan

1. Le schéma de McEliece

Principe du schéma de McEliece

C'est un schéma **à clé publique.**

On se donne une famille de triplets $(\mathscr{C}, t, \mathcal{A})$, où

- $\mathscr{C}$ est un code $[n, k]_q$ de matrice génératrice $\boldsymbol{G}$;
- $t \in \mathbb{N}^*$;
- $\mathcal{A}$ est algorithme "rapide" corrigeant jusqu'à t erreurs

Principe du schéma de McEliece

Fonctionnement :

- **Clé publique :** $(\boldsymbol{G}, t)$: le code et la capacité de correction ;
- **Clé secrète :** $\mathcal{A}$ l'algorithme.
- **Chiffrement :** $m \in \mathbb{F}_q^k$
  - $c = m\boldsymbol{G} \in \mathscr{C}$
  - On génère $e \in \mathbb{F}_q^n$ aléatoire tel que $w_H(e) \leqslant t$;
  - message chiffré :

$$m_{chiffr} \stackrel{\text{def}}{=} c + e$$

- **Déchiffrement :** On applique $\mathcal{A}$ et on retrouve c puis m.

Avantages et inconvénients

Avantages

- C'est un schéma post-quantique ;
- Chiffrement et déchiffrement rapides comparé à RSA et El Gamal (log discret). Le schéma original a
  - un chiffrement ≈ 5 fois plus rapide que RSA 1024 (avec exposant public 17)
  - déchiffrement ≈ 150 fois plus rapide que RSA 1024

Inconvénient

- Taille des clés considérable : La proposition originale de McEliece est un code $[1024, 524, 101]_2$ a une clé de 67ko soit ≈ 500 fois la taille d'une clé RSA 1024.

Familles proposées

Codes de Goppa Binaires [McEliece, 1977]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[1024, 524, 101]_2$	67ko	2^{62}
$[2048, 1608, 48]_2$	412ko	2^{96}

Familles proposées

Codes de Goppa Binaires [McEliece, 1977]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[1024, 524, 101]_2$	67ko	2^{62}
$[2048, 1608, 48]_2$	412ko	2^{96}

Pas d'attaque structurelle connue à ce jour

Familles proposées

Codes de Reed–Solomon Généralisés (GRS)

[Niederreiter, 1986]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[256, 128, 129]_{256}$	67ko	2^{95}

Familles proposées

Codes de Reed–Solomon Généralisés (GRS)

[Niederreiter, 1986]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[256, 128, 129]_{256}$	67ko	2^{95}

- **Attaque de** Sidelnikov, Shestakov, 1992. En $O(n^3)$.

Familles proposées

Codes de Reed–Solomon Généralisés (GRS)

[Niederreiter, 1986]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[256, 128, 129]_{256}$	67ko	2^{95}

- **Attaque de** Sidelnikov, Shestakov, 1992. En $O(n^3)$.
- Propositions de réparation par Berger et Loidreau (2005) prendre un sous-code de petite codimension mais **Attaque** de Wieschebrink (2006).

Familles proposées

Codes de Reed–Solomon Généralisés (GRS)

[Niederreiter, 1986]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[256, 128, 129]_{256}$	67ko	2^{95}

- **Attaque de** Sidelnikov, Shestakov, 1992. En $O(n^3)$.
- Propositions de réparation par Berger et Loidreau (2005) prendre un sous-code de petite codimension mais **Attaque** de Wieschebrink (2006).
- Proposition de réparation par Weischebrink (2006), ajouter des colonnes aléatoires dans la matrice génératrice mais **Attaque** par CGGOT (2013).

Familles proposées

Codes de Reed–Muller Binaires [Sidelnikov, 1994]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[1024, 176, 128]_2$	22.5ko	2^{72}
$[2048, 232, 256]_2$	59.4ko	2^{93}

Familles proposées

Codes de Reed–Muller Binaires [Sidelnikov, 1994]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[1024, 176, 128]_2$	22.5ko	2^{72}
$[2048, 232, 256]_2$	59.4ko	2^{93}

- **Attaque de** Minder Shokrollahi, 2007. Complexité sous-exponentielle.

Familles proposées

Codes géométriques [Janwa Moreno, 1996]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[171, 109, 61]_{128}$	16ko	2^{66}

Familles proposées

Codes géométriques [Janwa Moreno, 1996]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[171, 109, 61]_{128}$	16ko	2^{66}

- **Attaques (polynomiales) de**
  - Faure, Minder 2008. Genre $\leqslant 2$.
  - C-, Márquez–Corbella, Pellikaan, 2014. Genre quelconque

.

Familles proposées

Variantes avec clés compactes

- [Gaborit, 2005], codes BCH ;
  ($\sim$ 1.5 ko, Sécurité : $\geqslant 2^{80}$)
- [Berger, Cayrel, Gaborit, Otmani, 2009], codes alternants quasi-cycliques ;
  ($\sim$ 750 o, Sécurité : $\geqslant 2^{80}$)
- [Misoczki, Baretto, 2009], codes alternants quasi-diadiques.
  ($\sim$ 2.5 ko, Sécurité : $\geqslant 2^{80}$)

Attaques algébriques de

- Otmani, Tillich, Dallot, 2008 ;
- Faugère, Otmani, Perret, Tillich, 2010 ;
- Faugère, Otmani, Perret, Portzamparc, Tillich, 2014.

Familles proposées

MDPC Quasi-cycliques

[Misoczki, Tillich, Sendrier, Baretto, 2011]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[9602, 4801]_2$	600 o	2^{80}
$[19714, 9857]_2$	1,2 ko	2^{96}

Familles proposées

MDPC Quasi-cycliques

[Misoczki, Tillich, Sendrier, Baretto, 2011]

Paramètres	Clé	Sécurité
$[9602, 4801]_2$	600 o	2^{80}
$[19714, 9857]_2$	1,2 ko	2^{96}

Pas d'attaque structurelle connue à ce jour

Familles proposées

Codes de Goppa Sauvages [Bernstein, Lange, Peters, 2010]

Des clés de 78 à 200ko d'une sécurité $> 2^{128}$.

Familles proposées

Codes de Goppa Sauvages [Bernstein, Lange, Peters, 2010]

Des clés de 78 à 200ko d'une sécurité $> 2^{128}$.

Non cassé,

Familles proposées

Codes de Goppa Sauvages [Bernstein, Lange, Peters, 2010]

Des clés de 78 à 200ko d'une sécurité $> 2^{128}$.

Non cassé, mais...

2. L'attaque de Sidelnikov Shestakov

Codes de Reed Solomon Généralisés

Définition

Soient

- $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{F}_q$ deux à deux distincts.
- $\boldsymbol{y} = (y_0, \ldots, y_{n-1})$ un n uplet d'éléments non nuls dans $\mathbb{F}_q$.
- un entier $k < n$.

Le code $\mathbf{GRS}_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est défini par

$$\mathbf{GRS}_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left\{ (y_0 f(x_0), \ldots, y_{n-1} f(x_{n-1})) \mid f \in \mathbb{F}_q[z]_{<k} \right\}.$$

Le vecteur $\boldsymbol{x}$ est appelé le *support* et le vecteur $\boldsymbol{y}$ le *multiplicateur*.

Codes de Reed Solomon généralisés

Theorème

Les paramètres de $\mathbf{GRS}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *sont*

- $\dim \mathbf{GRS}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k$
- $d_{min}\mathbf{GRS}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = n - k + 1$

Fait. On peut corriger $\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor$ erreurs en temps polynomial ($O(n^2)$).

L'attaque de Sidelnikov Shestakov

L'attaque de Sidelnikov Shestakov

- Utilise comme première brique le calcul de mots de poids minimal.

L'attaque de Sidelnikov Shestakov

- Utilise comme première brique le calcul de mots de poids minimal.
- Peu adaptable à d'autres familles de codes.

Produit $\star$ et codes carrés

Dans ce qui suit, on munit $\mathbb{F}_q^n$ du *produit de Schur* $\star$

$$c \star d \stackrel{\text{def}}{=} (c_0 d_0, \ldots, c_{n-1} d_{n-1}).$$

Définition

Soient $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subseteq \mathbb{F}_q^n$, on définit

$$\mathscr{A} \star \mathscr{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Span}_{\mathbb{F}_q} \{\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{a} \in \mathscr{A},\ \boldsymbol{b} \in \mathscr{B}\}.$$

Si $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, on note $\mathscr{A}^{\star 2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{A} \star \mathscr{A}$.

Propriétés

Proposition

$$\dim \mathscr{A}^{\star 2} \leqslant \min \left\{ n, \binom{\dim \mathscr{A} + 1}{2} \right\}$$

Distingueur

Theorème (Cascudo, Cramer, Mirandola, Zémor, 2014)

Soit $\mathscr{A}$ *un code aléatoire de longueur* n *tel que* $n > \binom{\dim \mathscr{A}+1}{2}$

$$\mathbf{Prob}\left(\dim \mathscr{A}^2 < \binom{\dim \mathscr{A}+1}{2} - \ell\right) = O(q^{-\ell} q^{-\left(n-\binom{\dim \mathscr{A}+1}{2}\right)}).$$

Distingueur

Theorème (Cascudo, Cramer, Mirandola, Zémor, 2014)

Soit $\mathscr{A}$ *un code aléatoire de longueur* n *tel que* $n > \binom{\dim \mathscr{A}+1}{2}$

$$\mathbf{Prob}\left(\dim \mathscr{A}^2 < \binom{\dim \mathscr{A}+1}{2} - \ell\right) = O(q^{-\ell} q^{-\left(n - \binom{\dim \mathscr{A}+1}{2}\right)}).$$

De cette propriété on dispose d'une méthode pour distinguer certains codes algébriques de codes aléatoires.

Distingueur sur les GRS

Theorème

Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_q^n$ *un support et un multiplicateur. Alors* $\mathbf{GRS}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\star 2} = \mathbf{GRS}_{2k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\star 2})$ *et donc :*

$$\dim \mathbf{GRS}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\star 2} = 2k - 1.$$

3. Attaque par filtration

Filtrations

À partir d'un distingueur on peut calculer une filtration du code :

$$\mathscr{C} \supseteq \mathscr{C}_1 \supseteq \mathscr{C}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{C}_s \supseteq \cdots$$

Filtrations

À partir d'un distingueur on peut calculer une filtration du code :

$$\mathscr{C} \supseteq \mathscr{C}_1 \supseteq \mathscr{C}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{C}_s \supseteq \cdots$$

Un exemple pédagogique sur les GRS

4. Notre Attaque sur les Goppa Sauvages

Codes Alternants

Définition

Soit $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{F}_{q^m}^n$ un code sur $\mathbb{F}_{q^m}$, on définit son sous-code sur un sous-corps par

$$\mathscr{C} \cap \mathbb{F}_q^n.$$

Codes Alternants

Définition

Soit $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{F}_{q^m}^n$ un code sur $\mathbb{F}_{q^m}$, on définit son sous-code sur un sous-corps par

$$\mathscr{C} \cap \mathbb{F}_q^n.$$

Proposition

Si $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{F}_{q^m}^n$ *a pour paramètres* $[n, n-c, d]_{q^m}$, *alors*

$$\begin{aligned} \dim \mathscr{C} \cap \mathbb{F}_q^n &\geqslant n - mc \\ d_{min}\mathscr{C} \cap \mathbb{F}_q^n &\geqslant d. \end{aligned}$$

Codes Alternants

Définition

Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_{q^m}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_{q^m}^n$ comme dans la définition des GRS Le code $\mathscr{A}_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est défini par

$$\mathscr{A}_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{GRS}_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^\perp \cap \mathbb{F}_q^n$$

Codes Alternants

Définition

Soient $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_{q^m}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_{q^m}^n$ comme dans la définition des GRS Le code $\mathscr{A}_r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est défini par

$$\mathscr{A}_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{GRS}_r(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\perp \cap \mathbb{F}_q^n$$

Proposition

$$\begin{aligned} \dim \mathscr{A}_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\geqslant n - mr \\ d_{min} \mathscr{A}_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\geqslant r + 1 \end{aligned}$$

Codes de Goppa

Définition

Soit $x \in \mathbb{F}_{q^m}^n$ un support et $\Gamma \in \mathbb{F}_{q^m}[z]$ tel que $\forall i, \Gamma(x_i) \neq 0$, alors le code de Goppa $\mathscr{G}(x, \Gamma)$ est défini par

$$\mathscr{G}(x, \Gamma) = \mathscr{A}_{\deg \Gamma}(x, y),$$

avec $y_i = \frac{1}{\Gamma(x_i)}$.

Codes de Goppa sauvages

Theorème (Sugiyama, Kashara, Hirasawa, Namekawa 1976)

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_{q^m}^n$ *un support et* $\gamma \in \mathbb{F}_{q^m}[z]$ *irréductible, alors*

$$\mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q-1}\right) = \mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q}\right)$$

Codes de Goppa sauvages

Theorème (Sugiyama, Kashara, Hirasawa, Namekawa 1976)

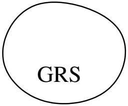
Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_{q^m}^n$ *un support et* $\gamma \in \mathbb{F}_{q^m}[z]$ *irréductible, alors*

$$\mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q-1}\right) = \mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q}\right)$$

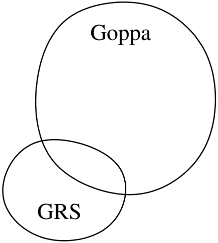
Un tel code est dit sauvage. *De plus ses paramètres sont de la forme*

$$\begin{aligned} \dim \mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q}\right) &\geqslant n - m(q-1)\deg \gamma \\ d_{min}\mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q}\right) &\geqslant q \deg \gamma + 1. \end{aligned}$$

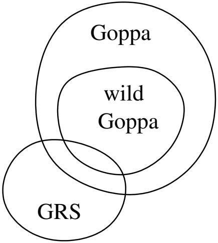
Un dessin



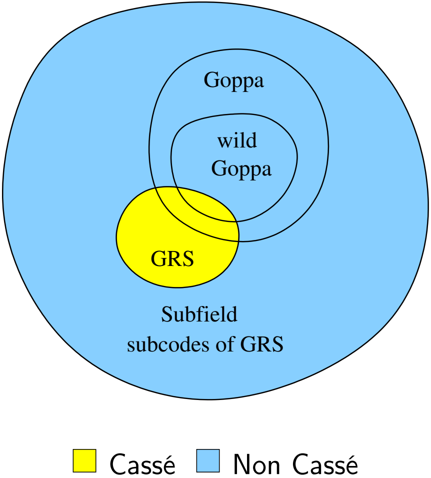
Un dessin



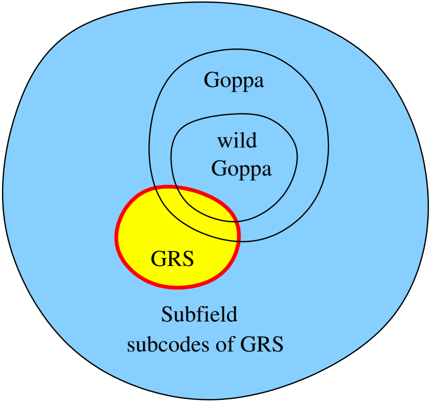
Un dessin



Un dessin

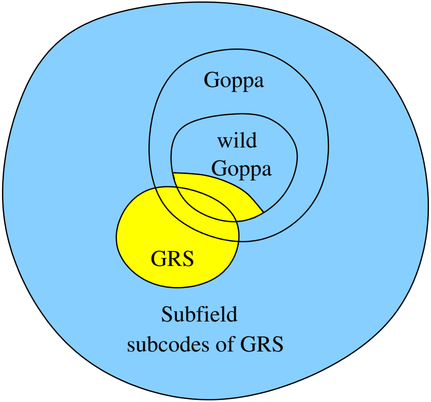

Goppa
wild
Goppa
GRS
Subfield
subcodes of GRS
Cassé
Non Cassé

Un dessin



Cassé Non Cassé

Un dessin – Notre contribution



Cassé Non Cassé

Difficulté liée aux paramètres ou la magie du raccourcissement

Distingueur par raccourcissement

Theorème (C-, Otmani, Tillich 2013)

Si $m = 2$ *et* $\gamma \in \mathbb{F}_{q^2}[z]$ *un polynôme irréductible de degré* r

(i) $\mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q-1}\right) = \mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q+1}\right)$;

(ii) $\dim \mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q}\right) \geqslant n - \underbrace{m}_{=2} r(q-1)$

Distingueur par raccourcissement

Theorème (C-, Otmani, Tillich 2013)

Si $m = 2$ *et* $\gamma \in \mathbb{F}_{q^2}[z]$ *un polynôme irréductible de degré* r

(i) $\mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q-1}\right) = \mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q+1}\right)$;

(ii) $\dim \mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q}\right) \geqslant n - \underbrace{m}_{=2} r(q-1) + r(r-2)$

Distingueur par raccourcissement

Theorème (C-, Otmani, Tillich 2013)

Si $m = 2$ et $\gamma \in \mathbb{F}_{q^2}[z]$ un polynôme irréductible de degré r

(i) $\mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q-1}\right) = \mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q+1}\right)$;

(ii) $\dim \mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q}\right) \geqslant n - \underbrace{m}_{=2} r(q-1) + r(r-2)$

Theorème (C-, Otmani, Tillich 2014)

Les raccourcis de ces codes en a positions sont distinguables pour $a \in \{a^-, \dots, a^+\}$ et

$$
\begin{aligned}
a^- &= n - 2r(q+1) - 1 \\
a^+ &= \max \left\{ a \geqslant 0 \;\middle|\; \begin{array}{c} 3(n-a) - 4r(q+1) - 2 \leqslant \\ \min \left\{ n-a, \binom{n-a-2r(q-1)+r(r-2)}{2} \right\} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

Distingueur par raccourcissement

Theorème (C-, Otmani, Tillich 2013)

Si $m = 2$ *et* $\gamma \in \mathbb{F}_{q^2}[z]$ *un polynôme irréductible de degré* r

(i) $\mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q-1}\right) = \mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q+1}\right)$;

(ii) $\dim \mathscr{G}\left(\mathbf{x}, \gamma^{q}\right) \geqslant n - \underbrace{m}_{=2} r(q-1) + r(r-2)$

Theorème (C-, Otmani, Tillich 2014)

Les raccourcis de ces codes en a *positions sont distinguables pour* $a \in \{a^-, \dots, a^+\}$ *et*

$$
\begin{aligned}
a^- &= n - 2r(q+1) - 1 \\
a^+ &= \max \left\{ a \geqslant 0 \;\middle|\; \begin{array}{c} 3(n-a) - 4r(q+1) - 2 \leqslant \\ \min\left\{ n-a, \binom{n-a-2r(q-1)+r(r-2)}{2} \right\} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

Notre attaque

La clé publique $\mathscr{C}$ est le code $\mathscr{G}\left(\boldsymbol{x}, \gamma^{q-1}\right)$, avec $m = 2$.

Notre attaque

La clé publique $\mathscr{C}$ est le code $\mathscr{G}\left(\boldsymbol{x}, \gamma^{q-1}\right)$, avec $m = 2$.

Fait

Sans perte de généralité on peut supposer

$$x_0 = 0 \quad et \quad x_1 = 1.$$

Notre attaque

Étape 1 : calcul de filtrations. On calcule en utilisant le distingueur les filtrations associées à

$$\mathbb{F}_{q^2}[z] \supseteq z\mathbb{F}_{q^2}[z] \supseteq \cdots \supseteq z^{q+1}\mathbb{F}_{q^2}[z]$$

Notre attaque

Étape 1 : calcul de filtrations. On calcule en utilisant le distingueur les filtrations associées à

$$\mathbb{F}_{q^2}[z] \supseteq z\mathbb{F}_{q^2}[z] \supseteq \cdots \supseteq z^{q+1}\mathbb{F}_{q^2}[z]$$

Les deux premiers termes de cette filtration s'obtiennent en raccourcissant le code en la première position.

Notre attaque

Étape 2 : calcul de $x^{\star(q+1)}$
On note $\mathscr{C}_{q+1}$ le code associé à $z^{q+1}\mathbb{F}_{q^2}[z]_{\leqslant s-(q+1)}$.

Lemme

$$\mathbf{x}^{\star(-(q+1))} \star \mathscr{C}_{q+1} \subseteq \mathscr{C}.$$

Notre attaque

Étape 2 : calcul de $x^{\star(q+1)}$

On note $\mathscr{C}_{q+1}$ le code associé à $z^{q+1}\mathbb{F}_{q^2}[z]_{\leqslant s-(q+1)}$.

Lemme

$$\mathbf{x}^{\star(-(q+1))} \star \mathscr{C}_{q+1} \subseteq \mathscr{C}.$$

Idée de preuve.

Soient $\mathbf{c} \in \mathscr{C}_{q+1}$ et $p_{\mathbf{c}}$ le polynôme correspondant. $p_{\mathbf{c}}$ est de la forme

$$p_{\mathbf{c}}(z) = z^{q+1} f(z), \qquad \deg f \leqslant s - (q+1).$$

□

Notre attaque

Étape 2 : calcul de $x^{\star(q+1)}$

On note $\mathscr{C}_{q+1}$ le code associé à $z^{q+1}\mathbb{F}_{q^2}[z]_{\leqslant s-(q+1)}$.

Lemme

$$\boldsymbol{x}^{\star(-(q+1))} \star \mathscr{C}_{q+1} \subseteq \mathscr{C}.$$

Idée de preuve.

Soient $\boldsymbol{c} \in \mathscr{C}_{q+1}$ et $p_{\boldsymbol{c}}$ le polynôme correspondant. $p_{\boldsymbol{c}}$ est de la forme

$$p_{\boldsymbol{c}}(z) = z^{q+1} f(z), \qquad \deg f \leqslant s - (q+1).$$

Pour tout $x \in \mathbb{F}_{q^2}$, $x^{q+1} \in \mathbb{F}_q$ (c'est $\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^2}/Fq}(x)$).

Si $x_i^{q+1} f(x_i) \in \mathbb{F}_q$ pour tout i, alors $f(x_i) \in \mathbb{F}_q$ et donc à f correspond le mot $\boldsymbol{x}^{\star-(q+1)} \star \boldsymbol{c} \in \mathscr{C}$ □

Notre attaque

Étape 2 : calcul de $x^{\star(q+1)}$

$x^{\star(q+1)}$ est solution du problème d'inconnue $\boldsymbol{t}$:

$$\mathscr{C}_{q+1} \subseteq \boldsymbol{t} \star \mathscr{C}.$$

Notre attaque

Étape 2 : calcul de $x^{\star(q+1)}$
$x^{\star(q+1)}$ est solution du problème d'inconnue $\boldsymbol{t}$:

$$\mathscr{C}_{q+1} \subseteq \boldsymbol{t} \star \mathscr{C}.$$

Remarque

On montre que ce calcul revient à résoudre un système de taille $\leqslant n^2 \times n$ (coût $O(n^4)$) puis à faire une recherche exhaustive dans un code de dimension 4 (coût $O(q^3) = O(n\sqrt{n})$).

Notre Attaque

On dispose de $\boldsymbol{x}^{q+1}$ et après ?...

Notre Attaque

On dispose de $\boldsymbol{x}^{q+1}$ et après ?... On peut calculer $(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\star(q+1)}$ par la même méthode !

Notre Attaque

On dispose de $\boldsymbol{x}^{q+1}$ et après ?... On peut calculer $(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\star(q+1)}$ par la même méthode !

Lemme

Soit $x \in \mathbb{F}_{q^2}$, *si on connaît* $N(x)$ *et* $N(x-1)$ *alors on connaît le polynôme minimal de* x

Démonstration.

Notre Attaque

On dispose de $\boldsymbol{x}^{q+1}$ et après ?... On peut calculer $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\star(q+1)}$ par la même méthode !

Lemme

Soit $x \in \mathbb{F}_{q^2}$, si on connaît $N(x)$ et $N(x-1)$ alors on connaît le polynôme minimal de x

Démonstration.

$$\begin{aligned}(x-1)^{q+1} &= (x-1)(x-1)^q = (x-1)(x^q-1)\\ &= \underbrace{x^{q+1}}_{\text{Connu}} - \underbrace{(x^q+x)}_{=\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^2}/Fq}(x)} + 1.\end{aligned}$$

Notre Attaque

On dispose de $\boldsymbol{x}^{q+1}$ et après ?... On peut calculer $(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\star(q+1)}$ par la même méthode !

Lemme

Soit $x \in \mathbb{F}_{q^2}$, si on connaît $N(x)$ et $N(x-1)$ alors on connaît le polynôme minimal de x

Démonstration.

$$\begin{aligned}(x-1)^{q+1} &= (x-1)(x-1)^q = (x-1)(x^q-1)\\ &= \underbrace{x^{q+1}}_{\text{Connu}} - \underbrace{(x^q+x)}_{=\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^2}/Fq}(x)} +1.\end{aligned}$$

Or le polynôme minimal de x est

$$z^2 - \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(x)z + \mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(x).$$

Notre Attaque

On dispose donc de la connaissance du support $\boldsymbol{x}$ à action Galoisienne près. Le calcul de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ tel que $\mathscr{C} = \mathscr{A}_{r(q+1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ se ramène à de l'algèbre linéaire (un peu technique).

Complexité et temps de calcul

La complexité de l'attaque est en $O(n^5)$
(plus précisément $O(n^4\sqrt{n} + n^4(q^2 - n)))$.

Table : Temps de calcul obtenus avec un processeur Intel® Xeon 2.27GHz

$[q, n, k, r]$	[29,781, 516,5]	[29, 791, 575, 4]	[29,794,529,5]
Average time	16min	19.5min	15.5min

(q, n, k, r)	[31, 795, 563, 4]	[31,813, 581,4]	[31, 851, 619, 4]
Average time	31.5min	31.5min	27.2min

(q, n, k, r)	[32,841,601,4]
Average time	49.5min

Conclusion

- Première attaque polyomiale sur des codes de Goppa classiques.

Conclusion

- Première attaque polyomiale sur des codes de Goppa classiques.
- Première attaque polynomiale sur des codes *sans aucune structure apparente*

Conclusion

- Première attaque polyomiale sur des codes de Goppa classiques.
- Première attaque polynomiale sur des codes *sans aucune structure apparente*
- Et après ?

Conclusion

- Première attaque polyomiale sur des codes de Goppa classiques.
- Première attaque polynomiale sur des codes *sans aucune structure apparente*
- Et après ? D'autres distingueurs ?

Conclusion

- Première attaque polyomiale sur des codes de Goppa classiques.
- Première attaque polynomiale sur des codes *sans aucune structure apparente*
- Et après ? D'autres distingueurs ? Peut-on transformer tout distingueur en un attaque ?

Merci de votre attention