Zéros réels de fonctions L d'Artin et biais de Tchebychev dans les corps de nombres

Alexandre Bailleul

ENS de Lyon

Mardi 8 décembre 2020

Organisation de l'exposé

1. Courses de nombres premiers
2. Le cas des corps de nombres
3. Zéros en $1/2$

Organisation de l'exposé

1. **Courses de nombres premiers**
2. Le cas des corps de nombres
3. Zéros en $1/2$

Le biais de Tchebychev

- Soient a et b premiers avec q. On sait (théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques) que

$$\pi(x;q,a) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi(x;q,b) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\varphi(q)}\,\mathrm{Li}(x) = \frac{1}{\varphi(q)}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t},$$

où

$$\pi(x;q,a) := \#\{p \leq x \mid p \equiv a \bmod q\}.$$

Le biais de Tchebychev

- Soient a et b premiers avec q. On sait (théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques) que

$$\pi(x;q,a) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi(x;q,b) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\varphi(q)}\operatorname{Li}(x) = \frac{1}{\varphi(q)}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t},$$

  où

$$\pi(x;q,a) := \#\{p \leq x \mid p \equiv a \bmod q\}.$$

- En 1853, Tchebychev prétend dans une lettre que $\pi(x;4,3) > \pi(x;4,1)$ pour x suffisamment grand.

Le biais de Tchebychev

- Soient a et b premiers avec q. On sait (théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques) que

$$\pi(x;q,a) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi(x;q,b) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\varphi(q)}\,\mathrm{Li}(x) = \frac{1}{\varphi(q)}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t},$$

où

$$\pi(x;q,a) := \#\{p \leq x \mid p \equiv a \bmod q\}.$$

- En 1853, Tchebychev prétend dans une lettre que $\pi(x;4,3) > \pi(x;4,1)$ pour x suffisamment grand.

- Il prétend aussi que $\sum_p (-1)^{\frac{p+1}{2}} e^{-pc} \underset{c\to 0}{\longrightarrow} +\infty$

Le biais de Tchebychev

- Soient a et b premiers avec q. On sait (théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques) que

$$\pi(x;q,a) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi(x;q,b) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\varphi(q)}\operatorname{Li}(x) = \frac{1}{\varphi(q)}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t},$$

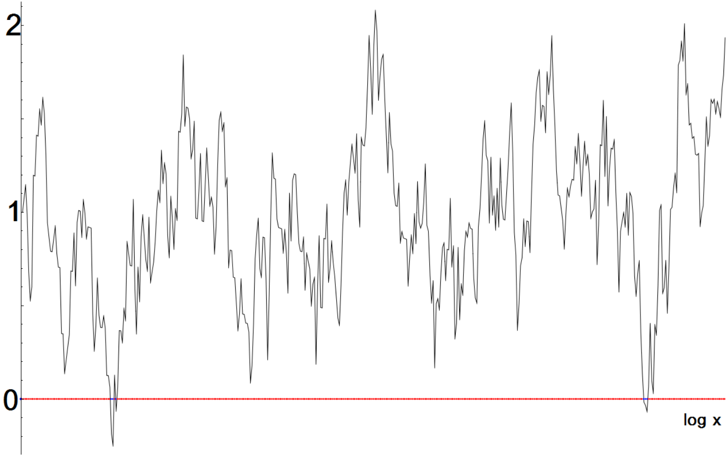
où

$$\pi(x;q,a) := \#\{p \leq x \mid p \equiv a \bmod q\}.$$

- En 1853, Tchebychev prétend dans une lettre que $\pi(x;4,3) > \pi(x;4,1)$ pour x suffisamment grand.

- Il prétend aussi que $\sum_p (-1)^{\frac{p+1}{2}} e^{-pc} \underset{c\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ ($\Leftrightarrow$ GRH pour $L(s,\chi_4)$ d'après Hardy, Littlewood, Landau).

Le biais de Tchebychev



$$\frac{\pi(x;4,3)-\pi(x;4,1)}{\sqrt{x}/\log x}, 10^4 \leq x \leq 10^8$$

(Daniel Fiorilli)

Inégalités entre fonctions arithmétiques

- On a longtemps pensé que $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ pour tout $x \geq 2$. Littlewood a montré en 1914 que $\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/2} \log\log\log x)$.

Inégalités entre fonctions arithmétiques

- On a longtemps pensé que $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ pour tout $x \geq 2$. Littlewood a montré en 1914 que $\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/2} \log\log\log x)$.
- Le premier contre-exemple à $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ vérifie $10^{19} \leq x \leq 10^{317}$ (nombre de Skewes). Les premières majorations « théoriques » étaient de l'ordre de $10^{10^{10^{34}}}$.

Inégalités entre fonctions arithmétiques

- On a longtemps pensé que $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ pour tout $x \geq 2$. Littlewood a montré en 1914 que $\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/2} \log\log\log x)$.
- Le premier contre-exemple à $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ vérifie $10^{19} \leq x \leq 10^{317}$ (nombre de Skewes). Les premières majorations « théoriques » étaient de l'ordre de $10^{10^{10^{34}}}$.
- Littlewood a aussi montré que $\pi(x; 4, 3) - \pi(x; 4, 1) = \Omega_{\pm}(x^{1/2} \log\log\log x)$, donc l'inégalité de Tchebychev n'est pas toujours vraie.

Le biais de Tchebychev

On souhaite estimer la « taille » de

$$\mathcal{P}_{4;3,1} := \{x \geq 2 \mid \pi(x;4,3) > \pi(x;4,1)\}.$$

Le biais de Tchebychev

On souhaite estimer la « taille » de

$$\mathcal{P}_{4;3,1} := \{x \geq 2 \mid \pi(x;4,3) > \pi(x;4,1)\}.$$

Dans la « course » entre les premiers $p \equiv 3 \bmod 4$ et les premiers $p \equiv 1 \bmod 4$, qui est en tête le plus souvent ?

Le biais de Tchebychev

On souhaite estimer la « taille » de

$$\mathcal{P}_{4;3,1} := \{x \geq 2 \mid \pi(x;4,3) > \pi(x;4,1)\}.$$

Dans la « course » entre les premiers $p \equiv 3 \bmod 4$ et les premiers $p \equiv 1 \bmod 4$, qui est en tête le plus souvent ?

- **Conjecture (Knapowski-Turán, 1962) :**

$$d(\mathcal{P}_{4;3,1}) := \lim_{X \to +\infty} \frac{|\mathcal{P}_{4;3,1} \cap [2,X]|}{X} = 1.$$

Le biais de Tchebychev

On souhaite estimer la « taille » de

$$\mathcal{P}_{4;3,1} := \{x \geq 2 \mid \pi(x;4,3) > \pi(x;4,1)\}.$$

Dans la « course » entre les premiers $p \equiv 3 \bmod 4$ et les premiers $p \equiv 1 \bmod 4$, qui est en tête le plus souvent ?

- **Conjecture (Knapowski-Turán, 1962) :**

$$d(\mathcal{P}_{4;3,1}) := \lim_{X \to +\infty} \frac{|\mathcal{P}_{4;3,1} \cap [2,X]|}{X} = 1.$$

- **Kaczorowski, 1995 :** Si $L(s,\chi_4)$ vérifie GRH (hypothèse de Riemann généralisée), alors

$$\underline{d}(\mathcal{P}_{4;3,1}) < 0,9594595\ldots$$

et

$$\overline{d}(\mathcal{P}_{4;3,1}) > 0,999989360\ldots$$

Le biais de Tchebychev

On souhaite estimer la « taille » de

$$\mathcal{P}_{4;3,1} := \{x \geq 2 \mid \pi(x;4,3) > \pi(x;4,1)\}.$$

Dans la « course » entre les premiers $p \equiv 3$ mod 4 et les premiers $p \equiv 1$ mod 4, qui est en tête le plus souvent ?

- **Conjecture (Knapowski-Turán, 1962) :**

$$d(\mathcal{P}_{4;3,1}) := \lim_{X \to +\infty} \frac{|\mathcal{P}_{4;3,1} \cap [2,X]|}{X} = 1.$$

- **Kaczorowski, 1995 :** Si $L(s,\chi_4)$ vérifie GRH (hypothèse de Riemann généralisée), alors

$$\underline{d}(\mathcal{P}_{4;3,1}) < 0,9594595\ldots$$

et

$$\overline{d}(\mathcal{P}_{4;3,1}) > 0,999989360\ldots$$

- **Rubinstein-Sarnak, 1994 :** Si $L(s,\chi_4)$ vérifie GRH et LI (indépendance linéaire),

$$\delta(\mathcal{P}_{4;3,1}) := \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\log X} \int_2^X \mathbf{1}_{\mathcal{P}_{4;3,1}}(t) \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

existe et $\delta(\mathcal{P}_{4;3,1}) \approx 0,9959\ldots$

Les résultats de Rubinstein et Sarnak

Si LI est vraie modulo q et les $L(s,\chi)$ avec $\chi \in X_q$ satisfont GRH alors :

- Si $a \equiv \square[q]$ et $b \equiv \square[q]$, ou si $a \not\equiv \square[q]$ et $b \not\equiv \square[q]$ alors $\delta(\mathcal{P}_{q;a,b}) = \frac{1}{2}$.

Les résultats de Rubinstein et Sarnak

Si LI est vraie modulo q et les $L(s,\chi)$ avec $\chi \in X_q$ satisfont GRH alors :

- Si $a \equiv \square[q]$ et $b \equiv \square[q]$, ou si $a \not\equiv \square[q]$ et $b \not\equiv \square[q]$ alors $\delta(\mathcal{P}_{q;a,b}) = \frac{1}{2}$.
- Si $a \not\equiv \square[q]$ et $b \equiv \square[q]$ alors $\delta(\mathcal{P}_{q;a,b}) > \frac{1}{2}$.

Les résultats de Rubinstein et Sarnak

Si LI est vraie modulo q et les $L(s,\chi)$ avec $\chi \in X_q$ satisfont GRH alors :

- Si $a \equiv \square[q]$ et $b \equiv \square[q]$, ou si $a \not\equiv \square[q]$ et $b \not\equiv \square[q]$ alors $\delta(\mathcal{P}_{q;a,b}) = \frac{1}{2}$.
- Si $a \not\equiv \square[q]$ et $b \equiv \square[q]$ alors $\delta(\mathcal{P}_{q;a,b}) > \frac{1}{2}$.
- **Théorème central limite** :

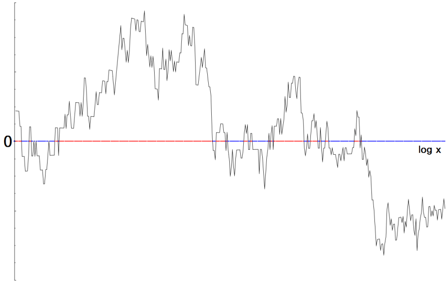
$$\max_{a,b \text{ premiers avec } q} \left| \delta(\mathcal{P}_{q;a,b}) - \frac{1}{2} \right| \underset{q \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les résultats de Rubinstein et Sarnak

Si LI est vraie modulo q et les $L(s,\chi)$ avec $\chi \in X_q$ satisfont GRH alors :

- Si $a \equiv \square[q]$ et $b \equiv \square[q]$, ou si $a \not\equiv \square[q]$ et $b \not\equiv \square[q]$ alors $\delta(\mathcal{P}_{q;a,b}) = \frac{1}{2}$.
- Si $a \not\equiv \square[q]$ et $b \equiv \square[q]$ alors $\delta(\mathcal{P}_{q;a,b}) > \frac{1}{2}$.
- **Théorème central limite** :

$$\max_{a,b \text{ premiers avec } q} \left| \delta(\mathcal{P}_{q;a,b}) - \frac{1}{2} \right| \underset{q \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$



$$\frac{\pi(x;101,3) - \pi(x;101,1)}{\sqrt{x}/\log x},$$

$$10^4 \le x \le 10^8$$

(Daniel Fiorilli)

La méthode de Rubinstein-Sarnak

Trois étapes :

1) Utilisation d'une **formule explicite** (sous GRH) :

La méthode de Rubinstein-Sarnak

Trois étapes :

1) Utilisation d'une **formule explicite** (sous GRH) :

$$\frac{\pi(x;q,a)-\pi(x;q,b)}{\sqrt{x}/\log x} = \#\sqrt{\{b\}} - \#\sqrt{\{a\}} \\ + \sum_{\chi\in X_q}\overline{\chi(b)-\chi(a)}\sum_{\gamma_\chi}\frac{x^{i\gamma_\chi}}{\frac{1}{2}+i\gamma_\chi} + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

les γ_χ étant les parties imaginaires des zéros des $L(s,\chi)$.

La méthode de Rubinstein-Sarnak

Trois étapes :

1) Utilisation d'une **formule explicite** (sous GRH) :

$$\frac{\pi(e^x;q,a)-\pi(e^x;q,b)}{e^{x/2}/x} = \#\sqrt{\{b\}} - \#\sqrt{\{a\}} + \sum_{\chi\in X_q} \overline{\chi(b)-\chi(a)} \sum_{\gamma_\chi} \frac{e^{i\gamma_\chi x}}{\frac{1}{2}+i\gamma_\chi} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

les γ_χ étant les parties imaginaires des zéros des $L(s,\chi)$.

La méthode de Rubinstein-Sarnak

Trois étapes :

1) Utilisation d'une **formule explicite** (sous GRH) :

$$\frac{\pi(e^x;q,a)-\pi(e^x;q,b)}{e^{x/2}/x} = \#\sqrt{\{b\}} - \#\sqrt{\{a\}} + \sum_{\chi\in X_q} \overline{\chi(b)-\chi(a)} \sum_{\gamma_\chi} \frac{e^{i\gamma_\chi x}}{\frac{1}{2}+i\gamma_\chi} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

les γ_χ étant les parties imaginaires des zéros des $L(s,\chi)$.

2) Utilisation du **théorème de Kronecker-Weyl** $\Rightarrow$ existence d'une distribution limite $\mu_{q;a,b}$ (mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$) pour $x \mapsto \frac{\pi(e^x;q,a)-\pi(e^x;q,b)}{e^{x/2}/x}$.

La méthode de Rubinstein-Sarnak

Trois étapes :

1) Utilisation d'une **formule explicite** (sous GRH) :

$$\frac{\pi(e^x;q,a)-\pi(e^x;q,b)}{e^{x/2}/x} = \#\sqrt{\{b\}} - \#\sqrt{\{a\}} + \sum_{\chi\in X_q} \overline{\chi(b)-\chi(a)} \sum_{\gamma_\chi} \frac{e^{i\gamma_\chi x}}{\frac{1}{2}+i\gamma_\chi} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

les γ_χ étant les parties imaginaires des zéros des $L(s,\chi)$.

2) Utilisation du **théorème de Kronecker-Weyl** $\Rightarrow$ existence d'une distribution limite $\mu_{q;a,b}$ (mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$) pour $x \mapsto \frac{\pi(e^x;q,a)-\pi(e^x;q,b)}{e^{x/2}/x}$.

3) Utilisation de l'hypothèse LI pour établir la régularité de $\mu_{q;a,b}$, étudier sa fonction caractéristique et l'existence de $\delta(\mathcal{P}_{q;a,b}) = \mu_{q;a,b}(]0,+\infty[)$.

L'hypothèse LI

Théorème de Kronecker-Weyl : Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont des réels alors $x \mapsto \left(e^{i\gamma_1 x}, \ldots, e^{i\gamma_n x}\right)$ s'équiréparti dans un tore de dimension $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$.

L'hypothèse LI

Théorème de Kronecker-Weyl : Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont des réels alors $x \mapsto \left(e^{i\gamma_1 x}, \ldots, e^{i\gamma_n x}\right)$ s'équiréparti dans un tore de dimension $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. En particulier, si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, $x \mapsto \left(e^{i\gamma_1 x}, \ldots, e^{i\gamma_n x}\right)$ « se comporte » comme un n-uplet de variables aléatoires **indépendantes** uniformes sur $\mathbb{S}^1$.

L'hypothèse LI

Théorème de Kronecker-Weyl : Si $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sont des réels alors $x \mapsto \left(e^{i\gamma_1 x}, \dots, e^{i\gamma_n x}\right)$ s'équiréparti dans un tore de dimension $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. En particulier, si $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, $x \mapsto \left(e^{i\gamma_1 x}, \dots, e^{i\gamma_n x}\right)$ « se comporte » comme un n-uplet de variables aléatoires **indépendantes** uniformes sur $\mathbb{S}^1$.

Conjecture (LI).

Le (multi)-ensemble $\left\{\gamma \geq 0 \mid \exists \chi \in X_q, L\left(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi\right) = 0\right\}$ est linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$.

L'hypothèse LI

Théorème de Kronecker-Weyl : Si $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sont des réels alors $x \mapsto \left(e^{i\gamma_1 x}, \dots, e^{i\gamma_n x}\right)$ s'équiréparti dans un tore de dimension $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. En particulier, si $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, $x \mapsto \left(e^{i\gamma_1 x}, \dots, e^{i\gamma_n x}\right)$ « se comporte » comme un n-uplet de variables aléatoires **indépendantes** uniformes sur $\mathbb{S}^1$.

Conjecture (LI).

Le (multi)-ensemble $\left\{\gamma \geq 0 \mid \exists \chi \in X_q, L\left(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi\right) = 0\right\}$ est linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$.

(Par l'équation fonctionnelle, si $L\left(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi\right) = 0$ alors $L\left(\frac{1}{2} - i\gamma, \overline{\chi}\right) = 0$)

L'hypothèse LI

Théorème de Kronecker-Weyl : Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont des réels alors $x \mapsto \left(e^{i\gamma_1 x}, \ldots, e^{i\gamma_n x}\right)$ s'équiréparti dans un tore de dimension $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. En particulier, si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, $x \mapsto \left(e^{i\gamma_1 x}, \ldots, e^{i\gamma_n x}\right)$ « se comporte » comme un n-uplet de variables aléatoires **indépendantes** uniformes sur $\mathbb{S}^1$.

Conjecture (LI).

Le (multi)-ensemble $\left\{\gamma \geq 0 \mid \exists \chi \in X_q, L\left(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi\right) = 0\right\}$ est linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$.

(Par l'équation fonctionnelle, si $L\left(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi\right) = 0$ alors $L\left(\frac{1}{2} - i\gamma, \overline{\chi}\right) = 0$)

L'hypothèse LI permet de traiter la somme sur les zéros dans la formule explicite comme une somme de variables aléatoires **indépendantes**, uniformes sur $\mathbb{S}^1$.

Organisation de l'exposé

1. Courses de nombres premiers
2. **Le cas des corps de nombres**
3. Zéros en 1/2

Frobenius et Chebotarev

Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres, de groupe de Galois G. À tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ non ramifié dans L, on peut associer une classe de conjugaison $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$ de G.

Frobenius et Chebotarev

Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres, de groupe de Galois G. À tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ non ramifié dans L, on peut associer une classe de conjugaison $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$ de G.

Pour $L = \mathbb{Q}(\zeta_q), K = \mathbb{Q}, G \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}$ et pour $p \nmid q$, $\mathrm{Frob}_p = a \Leftrightarrow p \equiv a \bmod q$.

Frobenius et Chebotarev

Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres, de groupe de Galois G. À tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ non ramifié dans L, on peut associer une classe de conjugaison $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$ de G.

Pour $L = \mathbb{Q}(\zeta_q)$, $K = \mathbb{Q}$, $G \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}$ et pour $p \nmid q$, $\mathrm{Frob}_p = a \Leftrightarrow p \equiv a \bmod q$.

Si C_1, C_2 sont des classes de conjugaison de G, on note

$$\mathcal{P}_{L/K;C_1,C_2} := \left\{ x \geq 2 \mid \frac{\pi(x;C_1,L/K)}{\#C_1} > \frac{\pi(x;C_2,L/K)}{\#C_2} \right\},$$

où

$$\pi(x;C,L/K) := \#\{\mathfrak{p} \mid N(\mathfrak{p}) \leq x, \mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}} = C\} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\#C}{\#G} \mathrm{Li}(x) \quad \text{(Chebotarev)}.$$

Fonctions L d'Artin

Si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, de représentation sous-jacente (ρ, V), sa fonction L d'Artin est

$$L(s, \chi, L/K) = \prod_{\mathfrak{p}} \det \left(\mathrm{id}_V - \rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) N(\mathfrak{p})^{-s}_{|V^{\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}}} \right)^{-1}.$$

Fonctions L d'Artin

Si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, de représentation sous-jacente (ρ, V), sa fonction L d'Artin est

$$L(s, \chi, L/K) = \prod_{\mathfrak{p}} \det\left(\mathrm{id}_V - \rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) N(\mathfrak{p})^{-s}_{|V^{\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}}}\right)^{-1}.$$

Théorème (Ng, 2000).

Si les fonctions L d'Artin associées aux caractères irréductibles de G satisfont AC (conjecture d'Artin), GRH et $\tilde{\mathrm{LI}}$, alors $\delta(\mathcal{P}_{L/K;C_1,C_2})$ existe, et en l'absence de zéros en $1/2$, $\delta(\mathcal{P}_{L/K;C_1,C_2}) - 1/2$ est du signe de $\frac{\#\sqrt{C_2}}{\#C_2} - \frac{\#\sqrt{C_1}}{\#C_1}$.

Fonctions L d'Artin

Si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, de représentation sous-jacente (ρ, V), sa fonction L d'Artin est

$$L(s, \chi, L/K) = \prod_{\mathfrak{p}} \det \left(\mathrm{id}_V - \rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) N(\mathfrak{p})^{-s}_{|V^{\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}}} \right)^{-1}.$$

Théorème (Ng, 2000).

Si les fonctions L d'Artin associées aux caractères irréductibles de G satisfont AC (conjecture d'Artin), GRH et $\tilde{\mathrm{LI}}$, alors $\delta(\mathcal{P}_{L/K;C_1,C_2})$ existe, et en l'absence de zéros en $1/2$, $\delta(\mathcal{P}_{L/K;C_1,C_2}) - 1/2$ est du signe de $\frac{\#\sqrt{C_2}}{\#C_2} - \frac{\#\sqrt{C_1}}{\#C_1}$.

Ici, $\tilde{\mathrm{LI}}$ signifie que le (multi)-ensemble $\left\{ \gamma > 0 \mid \exists \chi \in \mathrm{Irr}(G), L\left(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi, L/K\right) = 0 \right\}$ est linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$ (noter le > 0 au lieu de ≥ 0).

Défauts de $\tilde{\mathsf{LI}}$

Malheureusement $\tilde{\mathsf{LI}}$ est en général fausse : les fonctions L d'Artin admettent des factorisations non triviales à cause de leurs propriétés fonctorielles.

Défauts de L̃I

Malheureusement L̃I est en général fausse : les fonctions L d'Artin admettent des factorisations non triviales à cause de leurs propriétés fonctorielles.

Si L/F est galoisienne de groupe de Galois G', avec $F \subset K$ et $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ alors

$$L(s, \chi, L/K) = L\left(s, \mathrm{Ind}_G^{G'} \chi, L/F\right),$$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "G"'] \arrow[dd, dash, bend left, "G'"] \\ K \arrow[d, dash] \\ F \end{tikzcd}$$

Défauts de $\widetilde{\mathsf{LI}}$

Malheureusement $\widetilde{\mathsf{LI}}$ est en général fausse : les fonctions L d'Artin admettent des factorisations non triviales à cause de leurs propriétés fonctorielles.

Si L/F est galoisienne de groupe de Galois G', avec $F \subset K$ et $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ alors

$$L(s, \chi, L/K) = L\left(s, \mathrm{Ind}_G^{G'} \chi, L/F\right),$$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, dash, "G"'] \arrow[dd, dash, bend left, "G'"] \\
K \arrow[d, dash] \\
F
\end{tikzcd}$$

on décompose

$$\mathrm{Ind}_G^{G'} \chi = \sum_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G')} \langle \mathrm{Ind}_G^{G'} \chi, \lambda \rangle \lambda$$

Défauts de $\widetilde{\mathrm{LI}}$

Malheureusement $\widetilde{\mathrm{LI}}$ est en général fausse : les fonctions L d'Artin admettent des factorisations non triviales à cause de leurs propriétés fonctorielles.

Si L/F est galoisienne de groupe de Galois G', avec $F \subset K$ et $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ alors

$$L(s, \chi, L/K) = L\left(s, \mathrm{Ind}_G^{G'} \chi, L/F\right),$$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "G"'] \arrow[dd, dash, bend left, "G'"] \\ K \arrow[d, dash] \\ F \end{tikzcd}$$

on décompose

$$\mathrm{Ind}_G^{G'} \chi = \sum_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G')} \langle \mathrm{Ind}_G^{G'} \chi, \lambda \rangle \lambda$$

et on obtient

$$L(s, \chi, L/K) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G')} L(s, \lambda, L/F)^{\langle \mathrm{Ind}_G^{G'} \chi, \lambda \rangle}.$$

Défauts de $\widetilde{\mathsf{LI}}$

Malheureusement $\widetilde{\mathsf{LI}}$ est en général fausse : les fonctions L d'Artin admettent des factorisations non triviales à cause de leurs propriétés fonctorielles.

Si L/F est galoisienne de groupe de Galois G', avec $F \subset K$ et $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ alors

$$L(s, \chi, L/K) = L\left(s, \mathrm{Ind}_G^{G'} \chi, L/F\right),$$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "G"'] \arrow[dd, dash, bend left, "G'"] \\ K \arrow[d, dash] \\ F \end{tikzcd}$$

on décompose

$$\mathrm{Ind}_G^{G'} \chi = \sum_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G')} \langle \mathrm{Ind}_G^{G'} \chi, \lambda \rangle \lambda$$

et on obtient

$$L(s, \chi, L/K) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G')} L(s, \lambda, L/F)^{\langle \mathrm{Ind}_G^{G'} \chi, \lambda \rangle}.$$

Conclusion : $L(s, \chi, L/K)$ peut admettre des zéros multiples, ou des zéros en commun avec des $L(s, \chi', L/K)$, $\chi' \neq \chi$, quand $K \neq \mathbb{Q}$.

L'hypothèse LI

On suppose $L/\mathbb{Q}$ galoisienne, de groupe de Galois G^+.

L'hypothèse LI

On suppose $L/\mathbb{Q}$ galoisienne, de groupe de Galois G^+.

Conjecture (LI).

Le (multi)-ensemble $\left\{\gamma > 0 \mid \exists \chi \in \mathrm{Irr}(G^+), L\left(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi, L/\mathbb{Q}\right) = 0\right\}$ est linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$.

L'hypothèse LI

On suppose $L/\mathbb{Q}$ galoisienne, de groupe de Galois G^+.

Conjecture (LI).

Le (multi)-ensemble $\left\{\gamma > 0 \mid \exists\chi \in \mathrm{Irr}(G^+), L\left(\frac{1}{2}+i\gamma, \chi, L/\mathbb{Q}\right) = 0\right\}$ est linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$.

Les résultats de Ng restent valable sous l'hypothèse plus faible LI.

Résultats asymptotiques

Le comportement asymptotique de $\delta(\mathcal{P}_{L/K;C_1,C_2})$ est déterminé par

$$B(L/K;C_1,C_2) := \frac{\mathbb{E}(X(L/K;C_1,C_2))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X(L/K;C_1,C_2))}},$$

où $X(L/K;C_1,C_2)$ a pour loi la distribution limite de $\frac{x}{e^{x/2}}\left(\frac{\#G}{\#C_1}\pi(e^x;C_1,L/K) - \frac{\#G}{\#C_2}\pi(e^x;C_2,L/K)\right)$.

Résultats asymptotiques

Le comportement asymptotique de $\delta(\mathcal{P}_{L/K;C_1,C_2})$ est déterminé par

$$B(L/K;C_1,C_2) := \frac{\mathbb{E}(X(L/K;C_1,C_2))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X(L/K;C_1,C_2))}},$$

où $X(L/K;C_1,C_2)$ a pour loi la distribution limite de $\frac{x}{e^{x/2}}\left(\frac{\#G}{\#C_1}\pi(e^x;C_1,L/K) - \frac{\#G}{\#C_2}\pi(e^x;C_2,L/K)\right)$.

Théorème (Fiorilli-Jouve, 2019).

Supposons GRH, LI et la conjecture d'Artin pour les extensions considérées, alors

i) Si $B(L/K;C_1,C_2) \to 0$ et $\mathbb{E}(X(L/K;C_1,C_2))$ est bornée, alors

$$\delta(\mathcal{P}_{L/K;C_1,C_2}) - \frac{1}{2} = O\left(\mathrm{Var}(X(L/K;C_1,C_2))^{-1/3}\right).$$

ii) Si $B(L/K;C_1,C_2) \to +\infty$, alors

$$c_1 e^{-c_2 B(L/K;C_1,C_2)^2} \overset{(\text{si } K=\mathbb{Q})}{<} 1 - \delta(\mathcal{P}_{L/K;C_1,C_2}) < e^{-c_3 B(L/K;C_1,C_2)^2}.$$

Quand $K \neq \mathbb{Q}$, il est plus difficile d'obtenir une minoration dans le cas de biais extrêmes car $\mathbb{E}(X(L/K;C_1,C_2))$ s'exprime à l'aide des caractères de G, et $\mathrm{Var}(X(L/K;C_1,C_2))$ avec ceux de G^+.

Quand $K \neq \mathbb{Q}$, il est plus difficile d'obtenir une minoration dans le cas de biais extrêmes car $\mathbb{E}(X(L/K;C_1,C_2))$ s'exprime à l'aide des caractères de G, et $\mathrm{Var}(X(L/K;C_1,C_2))$ avec ceux de G^+.

Théorème (B. , 2019).

Supposons GRH, LI et la conjecture d'Artin pour les extensions considérées. Si $B(L/K;C_1,C_2) \to +\infty$, alors

$$c_1 e^{-c_2 Q(C_1,C_2) B(L/K;C_1,C_2)^2} < 1 - \delta(\mathcal{P}_{L/K;C_1,C_2})$$

où $Q(C_1,C_2)$ est d'autant plus grand qu'il y a de « collisions » entre les induits caractères irréductibles de G dans G^+.

Organisation de l'exposé

Formule explicite

Dans la formule explicite

$$\frac{x}{e^{x/2}}\left(\frac{\#G}{\#C_1}\pi(e^x;C_1,L/K)-\frac{\#G}{\#C_2}\pi(e^x;C_2,L/K)\right)$$
$$=\frac{\#\sqrt{C_2}}{\#C_2}-\frac{\#\sqrt{C_1}}{\#C_1}+\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\overline{\chi(C_2)-\chi(C_1)}\sum_{\gamma_\chi}\frac{e^{i\gamma_\chi x}}{\frac{1}{2}+i\gamma_\chi}+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

un $\gamma_\chi = 0$ contribue à l'espérance.

Formule explicite

Dans la formule explicite

$$\frac{x}{e^{x/2}}\left(\frac{\#G}{\#C_1}\pi(e^x;C_1,L/K)-\frac{\#G}{\#C_2}\pi(e^x;C_2,L/K)\right)$$
$$=\frac{\#\sqrt{C_2}}{\#C_2}-\frac{\#\sqrt{C_1}}{\#C_1}+\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\overline{\chi(C_2)-\chi(C_1)}\sum_{\gamma_\chi}\frac{e^{i\gamma_\chi x}}{\frac{1}{2}+i\gamma_\chi}+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

un $\gamma_\chi=0$ contribue à l'espérance.

Peut-on influer sur le biais de Tchebychev à l'aide de zéros en $1/2$?

Root number et zéros en $1/2$

Des exemples de fonctions L d'Artin s'annulant en $1/2$ sont connus (Armitage, Serre).

Root number et zéros en $1/2$

Des exemples de fonctions L d'Artin s'annulant en $1/2$ sont connus (Armitage, Serre). Si χ est réel, on a l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(1-s,\chi) = W(\chi)\Lambda(s,\chi) \quad (\Lambda(s,\chi) = L(s,\chi,L/K) \times \text{facteurs Gamma}),$$

où la constante $W(\chi)$ (*root number*) ne peut être que $+1$ ou -1.

Root number et zéros en $1/2$

Des exemples de fonctions L d'Artin s'annulant en $1/2$ sont connus (Armitage, Serre). Si χ est réel, on a l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(1-s,\chi) = W(\chi)\Lambda(s,\chi) \quad (\Lambda(s,\chi) = L(s,\chi,L/K) \times \text{facteurs Gamma}),$$

où la constante $W(\chi)$ (*root number*) ne peut être que $+1$ ou -1. Si $W(\chi) = -1$ alors $L(1/2,\chi,L/K) = 0$!

Root number et zéros en $1/2$

Des exemples de fonctions L d'Artin s'annulant en $1/2$ sont connus (Armitage, Serre). Si χ est réel, on a l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(1-s,\chi) = W(\chi)\Lambda(s,\chi) \quad (\Lambda(s,\chi) = L(s,\chi,L/K) \times \text{facteurs Gamma}),$$

où la constante $W(\chi)$ (*root number*) ne peut être que $+1$ ou -1. Si $W(\chi) = -1$ alors $L(1/2,\chi,L/K) = 0$!

Il y a deux familles de caractères irréductibles réels : les caractères **orthogonaux** et les caractères **symplectiques**.

Root number et zéros en $1/2$

Des exemples de fonctions L d'Artin s'annulant en $1/2$ sont connus (Armitage, Serre). Si χ est réel, on a l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(1-s,\chi) = W(\chi)\Lambda(s,\chi) \quad (\Lambda(s,\chi) = L(s,\chi,L/K) \times \text{facteurs Gamma}),$$

où la constante $W(\chi)$ (*root number*) ne peut être que $+1$ ou -1. Si $W(\chi) = -1$ alors $L(1/2,\chi,L/K) = 0$!

Il y a deux familles de caractères irréductibles réels : les caractères **orthogonaux** et les caractères **symplectiques**.

- **Fröhlich-Queyrut, 1973 :** Si χ est orthogonal, $W(\chi) = +1$.

Root number et zéros en $1/2$

Des exemples de fonctions L d'Artin s'annulant en $1/2$ sont connus (Armitage, Serre). Si χ est réel, on a l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(1-s,\chi) = W(\chi)\Lambda(s,\chi) \quad (\Lambda(s,\chi) = L(s,\chi,L/K) \times \text{facteurs Gamma}),$$

où la constante $W(\chi)$ (*root number*) ne peut être que $+1$ ou -1. Si $W(\chi) = -1$ alors $L(1/2,\chi,L/K) = 0$!

Il y a deux familles de caractères irréductibles réels : les caractères **orthogonaux** et les caractères **symplectiques**.

- **Fröhlich-Queyrut, 1973 :** Si χ est orthogonal, $W(\chi) = +1$.
- Tous les exemples connus de root numbers -1, et *a fortiori* de zéros en $1/2$ correspondent à des caractères symplectiques.

Hypothèse LI^+ et groupes de quaternions

Conjecture (LI^+).

$L/\mathbb{Q}$ vérifie LI et pour tout $\lambda \in \mathrm{Irr}(G^+)$, $L(1/2, \lambda, L/\mathbb{Q}) = 0$ se produit si et seulement si $W(\lambda) = -1$, et ça ne peut se produire que si λ est symplectique.

Hypothèse LI^+ et groupes de quaternions

Conjecture (LI^+).

$L/\mathbb{Q}$ vérifie LI et pour tout $\lambda \in \mathrm{Irr}(G^+)$, $L(1/2, \lambda, L/\mathbb{Q}) = 0$ se produit si et seulement si $W(\lambda) = -1$, et ça ne peut se produire que si λ est symplectique.

Sous LI^+, on veut utiliser des groupes de Galois possédant beaucoup de caractères symplectiques pour avoir une influence non négligeable de zéros en $1/2$.

Hypothèse LI^+ et groupes de quaternions

Conjecture (LI^+).

$L/\mathbb{Q}$ vérifie LI et pour tout $\lambda \in \mathrm{Irr}(G^+)$, $L(1/2, \lambda, L/\mathbb{Q}) = 0$ se produit si et seulement si $W(\lambda) = -1$, et ça ne peut se produire que si λ est symplectique.

Sous LI^+, on veut utiliser des groupes de Galois possédant beaucoup de caractères symplectiques pour avoir une influence non négligeable de zéros en $1/2$.

Les groupes

$$\mathbb{H}_{2^n} := \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = 1, x^{2^{n-2}} = y^2, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

possèdent 2^n éléments, $2^{n-2} + 3$ caractères irréductibles et 2^{n-3} caractères symplectiques.

Hypothèse LI^+ et groupes de quaternions

Conjecture (LI^+).

$L/\mathbb{Q}$ vérifie LI et pour tout $\lambda \in \mathrm{Irr}(G^+)$, $L(1/2, \lambda, L/\mathbb{Q}) = 0$ se produit si et seulement si $W(\lambda) = -1$, et ça ne peut se produire que si λ est symplectique.

Sous LI^+, on veut utiliser des groupes de Galois possédant beaucoup de caractères symplectiques pour avoir une influence non négligeable de zéros en $1/2$.

Les groupes

$$\mathbb{H}_{2^n} := \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = 1, x^{2^{n-2}} = y^2, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

possèdent 2^n éléments, $2^{n-2} + 3$ caractères irréductibles et 2^{n-3} caractères symplectiques. De plus, $-1 := x^{2^{n-2}}$ a $2^{n-1} + 1$ racines carrées et 1 n'en a que 2.

Biais modérés opposés

Théorème (B. , 2019).

Supposons GRH et LI$^+$ pour les fonctions L d'Artin qui interviennent. Soit f une fonction telle que $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Il existe deux familles $(K_d)_d$ et $(L_d)_d$ d'extensions galoisiennes de $\mathbb{Q}$ telles que $\mathrm{Gal}(K_d/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(L_d/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}_8$, $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset K_d \cap L_d$,

$$0 < 1/2 - \delta(\mathcal{P}_{K_d/\mathbb{Q};1,-1}) \ll \frac{1}{f(d)}$$

et

$$0 < \delta(\mathcal{P}_{L_d/\mathbb{Q};1,-1}) - 1/2 \ll \frac{1}{f(d)}.$$

Idée de démonstration

- Un théorème de Fröhlich, issu de sa théorie des modules galoisiens, permet de construire des extensions K de $\mathbb{Q}$ telles que :

Idée de démonstration

- Un théorème de Fröhlich, issu de sa théorie des modules galoisiens, permet de construire des extensions K de $\mathbb{Q}$ telles que :
  a) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}_8$

Idée de démonstration

- Un théorème de Fröhlich, issu de sa théorie des modules galoisiens, permet de construire des extensions K de $\mathbb{Q}$ telles que :
  a) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}_8$
  b) $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset K$

Idée de démonstration

- Un théorème de Fröhlich, issu de sa théorie des modules galoisiens, permet de construire des extensions K de $\mathbb{Q}$ telles que :
  a) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}_8$
  b) $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset K$
  c) On peut prescrire un ensemble arbitraire de premiers ramifiés dans K.

Idée de démonstration

- Un théorème de Fröhlich, issu de sa théorie des modules galoisiens, permet de construire des extensions K de $\mathbb{Q}$ telles que :
  a) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}_8$
  b) $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset K$
  c) On peut prescrire un ensemble arbitraire de premiers ramifiés dans K.
  d) On peut prescrire le root number du caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Idée de démonstration

- Un théorème de Fröhlich, issu de sa théorie des modules galoisiens, permet de construire des extensions K de $\mathbb{Q}$ telles que :
  a) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}_8$
  b) $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset K$
  c) On peut prescrire un ensemble arbitraire de premiers ramifiés dans K.
  d) On peut prescrire le root number du caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

- On montre que $\mathrm{Var}(X(K/\mathbb{Q}; C_1, C_{-1})) \asymp \log |d_K|$ et on a prescrit la ramification de sorte que $\log |d_K| \gg f(d)^3$.

Idée de démonstration

- Un théorème de Fröhlich, issu de sa théorie des modules galoisiens, permet de construire des extensions K de $\mathbb{Q}$ telles que :
  a) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}_8$
  b) $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset K$
  c) On peut prescrire un ensemble arbitraire de premiers ramifiés dans K.
  d) On peut prescrire le root number du caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

- On montre que $\mathrm{Var}(X(K/\mathbb{Q}; C_1, C_{-1})) \asymp \log |d_K|$ et on a prescrit la ramification de sorte que $\log |d_K| \gg f(d)^3$.

- La présence d'un zéro en $1/2$ dans la famille $(K_d)_d$ (causée par $W(\psi) = -1$, avec ψ symplectique) entraîne une espérance négative, alors qu'elle est positive dans $(L_d)_d$.

Idée de démonstration

- Un théorème de Fröhlich, issu de sa théorie des modules galoisiens, permet de construire des extensions K de $\mathbb{Q}$ telles que :
  a) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}_8$
  b) $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset K$
  c) On peut prescrire un ensemble arbitraire de premiers ramifiés dans K.
  d) On peut prescrire le root number du caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
- On montre que $\mathrm{Var}(X(K/\mathbb{Q}; C_1, C_{-1})) \asymp \log |d_K|$ et on a prescrit la ramification de sorte que $\log |d_K| \gg f(d)^3$.
- La présence d'un zéro en $1/2$ dans la famille $(K_d)_d$ (causée par $W(\psi) = -1$, avec ψ symplectique) entraîne une espérance négative, alors qu'elle est positive dans $(L_d)_d$.
- On conclut avec le TCL de Fiorilli-Jouve.

Biais extrêmes opposés

Théorème (B. , 2019).

Sous GRH et LI^+ pour les fonctions L d'Artin qui interviennent, il existe deux familles $(\mathcal{Q}_n^+)_{n\geq 3}$ et $(\mathcal{Q}_n^-)_{n\geq 3}$ d'extensions galoisiennes de $\mathbb{Q}$ telles que $\mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^+/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^-/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}_{2^n}$ et

$$c_1 \exp\left(-c_2 2^n\right) < 1 - \delta(\mathcal{P}_{\mathcal{Q}_n^+/\mathbb{Q};1,-1}) < \exp\left(-c_3 \frac{2^n}{n}\right)$$

et

$$c_1 \exp\left(-c_2 2^n\right) < \delta(\mathcal{P}_{\mathcal{Q}_n^-;1,-1}) < \exp\left(-c_3 \frac{2^n}{n}\right).$$

Idée de démonstration

- La théorie de Fröhlich montre que $W(\chi)$ est le même pour tout caractère symplectique d'une extension quaternionienne modérément ramifiée :

Idée de démonstration

- La théorie de Fröhlich montre que $W(\chi)$ est le même pour tout caractère symplectique d'une extension quaternionienne modérément ramifiée : on va construire $(\mathcal{Q}_n^{\pm})_{n\geq 3}$ modérément ramifiés sur $\mathbb{Q}$ telles que $W_{\mathcal{Q}_n^+} = +1$ pour tout caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^+/\mathbb{Q})$ et $W_{\mathcal{Q}_n^-} = -1$ pour tout caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^-/\mathbb{Q})$.

Idée de démonstration

- La théorie de Fröhlich montre que $W(\chi)$ est le même pour tout caractère symplectique d'une extension quaternionienne modérément ramifiée : on va construire $(\mathcal{Q}_n^{\pm})_{n\geq 3}$ modérément ramifiés sur $\mathbb{Q}$ telles que $W_{\mathcal{Q}_n^+} = +1$ pour tout caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^+/\mathbb{Q})$ et $W_{\mathcal{Q}_n^-} = -1$ pour tout caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^-/\mathbb{Q})$.

- Fröhlich, toujours, permet de construire de telles extensions $K/\mathbb{Q}$ à root numbers et ramification prescrits. Le choix du groupe de Galois et de W_K se traduit par une propriété « de type Chebotarev » pour un nombre premier qui sera (presque) le seul ramifié dans l'extension.

Idée de démonstration

- La théorie de Fröhlich montre que $W(\chi)$ est le même pour tout caractère symplectique d'une extension quaternionienne modérément ramifiée : on va construire $(\mathcal{Q}_n^{\pm})_{n\geq 3}$ modérément ramifiés sur $\mathbb{Q}$ telles que $W_{\mathcal{Q}_n^+} = +1$ pour tout caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^+/\mathbb{Q})$ et $W_{\mathcal{Q}_n^-} = -1$ pour tout caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^-/\mathbb{Q})$.

- Fröhlich, toujours, permet de construire de telles extensions $K/\mathbb{Q}$ à root numbers et ramification prescrits. Le choix du groupe de Galois et de W_K se traduit par une propriété « de type Chebotarev » pour un nombre premier qui sera (presque) le seul ramifié dans l'extension.

- Une borne sur le plus petit premier dans le théorème de Chebotarev permet ainsi de contrôler la taille du discriminant des extensions construites.

Idée de démonstration

- La théorie de Fröhlich montre que $W(\chi)$ est le même pour tout caractère symplectique d'une extension quaternionienne modérément ramifiée : on va construire $(\mathcal{Q}_n^{\pm})_{n\geq 3}$ modérément ramifiés sur $\mathbb{Q}$ telles que $W_{\mathcal{Q}_n^+} = +1$ pour tout caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^+/\mathbb{Q})$ et $W_{\mathcal{Q}_n^-} = -1$ pour tout caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^-/\mathbb{Q})$.

- Fröhlich, toujours, permet de construire de telles extensions $K/\mathbb{Q}$ à root numbers et ramification prescrits. Le choix du groupe de Galois et de W_K se traduit par une propriété « de type Chebotarev » pour un nombre premier qui sera (presque) le seul ramifié dans l'extension.

- Une borne sur le plus petit premier dans le théorème de Chebotarev permet ainsi de contrôler la taille du discriminant des extensions construites.

- On montre que la variance est contrôlée par le discriminant, et les espérances explosent vers $+\infty$ le long de $(\mathcal{Q}_n^+)_{n\geq 3}$ et vers $-\infty$ le long de $(\mathcal{Q}_n^-)_{n\geq 3}$.

Idée de démonstration

- La théorie de Fröhlich montre que $W(\chi)$ est le même pour tout caractère symplectique d'une extension quaternionienne modérément ramifiée : on va construire $(\mathcal{Q}_n^{\pm})_{n\geq 3}$ modérément ramifiés sur $\mathbb{Q}$ telles que $W_{\mathcal{Q}_n^+} = +1$ pour tout caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^+/\mathbb{Q})$ et $W_{\mathcal{Q}_n^-} = -1$ pour tout caractère symplectique de $\mathrm{Gal}(\mathcal{Q}_n^-/\mathbb{Q})$.

- Fröhlich, toujours, permet de construire de telles extensions $K/\mathbb{Q}$ à root numbers et ramification prescrits. Le choix du groupe de Galois et de W_K se traduit par une propriété « de type Chebotarev » pour un nombre premier qui sera (presque) le seul ramifié dans l'extension.

- Une borne sur le plus petit premier dans le théorème de Chebotarev permet ainsi de contrôler la taille du discriminant des extensions construites.

- On montre que la variance est contrôlée par le discriminant, et les espérances explosent vers $+\infty$ le long de $(\mathcal{Q}_n^+)_{n\geq 3}$ et vers $-\infty$ le long de $(\mathcal{Q}_n^-)_{n\geq 3}$.

- On conclut avec les inégalités de grandes déviations de Fiorilli-Jouve.

Le cas des groupes diédraux

Le groupe $\mathcal{D}_{2^{n-1}}$ a la même table de caractères que $\mathbb{H}_{2^n}$, mais uniquement des caractères orthogonaux, donc un tel phénomène ne peut se produire pour de tels groupes de Galois !

Le cas des groupes diédraux

Le groupe $\mathcal{D}_{2^{n-1}}$ a la même table de caractères que $\mathbb{H}_{2^n}$, mais uniquement des caractères orthogonaux, donc un tel phénomène ne peut se produire pour de tels groupes de Galois !

Une construction utilisant la théorie du corps de classes donne le résultat suivant :

Théorème (B. , 2019).

Sous GRH et LI$^+$ pour les fonctions L d'Artin qui interviennent, il existe une famille $(D_n)_{n\geq 3}$ d'extensions galoisiennes de $\mathbb{Q}$ telles que $\mathrm{Gal}(D_n/\mathbb{Q}) \simeq \mathcal{D}_{2^{n-1}}$ et

$$c_1 \exp\left(-c_2 2^n\right) < 1 - \delta(\mathcal{P}_{D_n/\mathbb{Q};1,-1}) < \exp\left(-c_3 \frac{2^n}{n}\right).$$

Merci de votre attention.