Dynamiques des systèmes simpliciaux

Charles Fougeron

30 mars 2021

Université de Paris

INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE FONDAMENTALE

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0, 1]$

Approximation par des rationnels

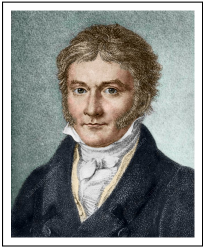
$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0, 1]$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$$



Algorithme

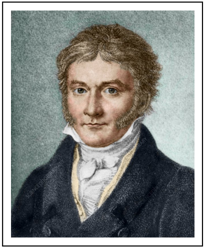
$$G : x \to \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0, 1]$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$$



Développement

$$x = [a_1, a_2, \ldots]$$

Algorithme

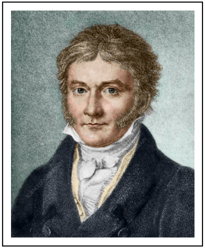
$$G : x \to \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0, 1]$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$$



Développement

$$x = [a_1, a_2, \ldots]$$

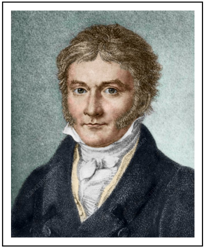
$$\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

$$G : x \to \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0, 1]$



Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$$

Développement

$$x = [a_1, a_2, \ldots]$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

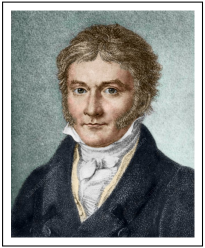
$$T : (1, x) \to (1, x - [x])$$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0, 1]$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$$



Développement

$$x = [a_1, a_2, \dots]$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

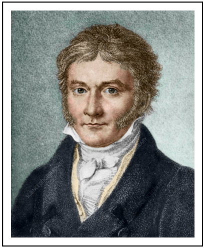
Algorithme

$$T : (1, x) \to (1, x - 1)$$

pour $1 < x$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0,1]$



Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$$

Développement

$$x = [a_1, a_2, \dots]$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

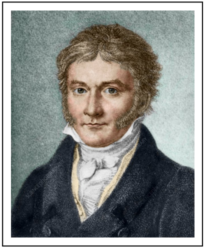
Algorithme

$$T : (x_1, x_2) \to (x_1, x_2 - x_1)$$

pour $x_1 < x_2$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0,1]$



Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$$

Développement

$$x \to \sigma_1^{a_1}\sigma_2^{a_2}\sigma_1^{a_3}\dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

$$T : (x_1, x_2) \to (x_1, x_2 - x_1)$$

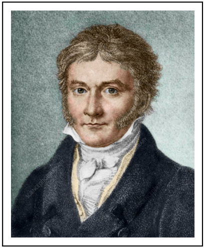
pour $x_1 < x_2$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0,1]^2$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$$



Développement

$$x \to \sigma_1^{a_1}\sigma_2^{a_2}\sigma_1^{a_3}\dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

$$T : (x_1, x_2) \to (x_1, x_2 - x_1)$$

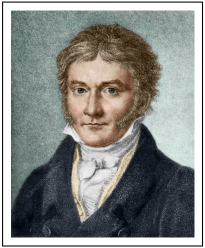
pour $x_1 < x_2$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0,1]^2$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \to \sigma_1^{a_1} \sigma_2^{a_2} \sigma_1^{a_3} \dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

$$T : (x_1, x_2) \to (x_1, x_2 - x_1)$$

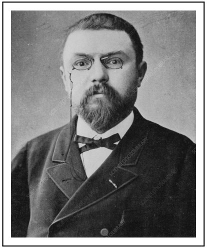
pour $x_1 < x_2$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0,1]^2$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \to \sigma_1^{a_1}\sigma_2^{a_2}\sigma_1^{a_3}\dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

$$T : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2)$$

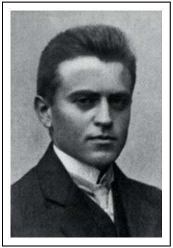
pour $x_1 < x_2 < x_3$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0,1]^2$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \to \sigma_1^{a_1}\sigma_2^{a_2}\sigma_1^{a_3}\dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

$$T : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2)$$
$$(x_1, x_2, x_3 - x_2)$$

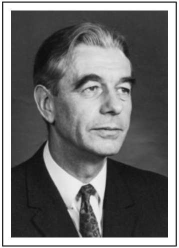
pour $x_1 < x_2 < x_3$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0,1]^2$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \to \sigma_1^{a_1}\sigma_2^{a_2}\sigma_1^{a_3}\dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

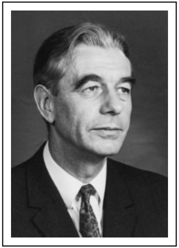
$$\begin{aligned} T : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2) \\ (x_1, x_2, x_3 - x_2) \\ (x_1, x_2, x_3 - x_1) \\ \text{pour } x_1 < x_2 < x_3 \end{aligned}$$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0,1]^2$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \to \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

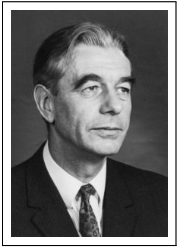
$$\begin{aligned} T : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2) \\ (x_1, x_2, x_3 - x_2) \\ (x_1, x_2, x_3 - x_1) \\ \text{pour } x_1 < x_2 < x_3 \end{aligned}$$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0,1]^2$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \to \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} \stackrel{?}{=} \mathbf{x}$

Algorithme

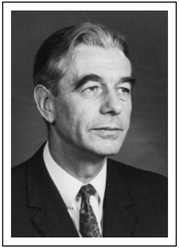
$$T : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2)$$
$$(x_1, x_2, x_3 - x_2)$$
$$(x_1, x_2, x_3 - x_1)$$
$$\text{pour } x_1 < x_2 < x_3$$

Algorithmes de fraction continue

$x \in [0,1]^2$

Approximation par des rationnels

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \to \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} \stackrel{?}{=} \mathbf{x}$
- Ergodicité de T

Algorithme

$$T : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2)$$
$$(x_1, x_2, x_3 - x_2)$$
$$(x_1, x_2, x_3 - x_1)$$
pour $x_1 < x_2 < x_3$

Algorithmes de fraction continue

Poincaré

$$T(\mathrm{x}) = (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2)$$
$$\text{pour } x_1 < x_2 < x_3$$

Brun

$$T(\mathrm{x}) = (x_1, x_2, x_3 - x_2)$$
$$\text{pour } x_1 < x_2 < x_3$$

Selmer

$$T(\mathrm{x}) = (x_1, x_2, x_3 - x_1)$$
$$\text{pour } x_1 < x_2 < x_3$$

Algorithmes de fraction continue

Poincaré

Théorème (Nogueira 1995)

Pour presque tout x*, les approximations ne convergent pas vers* x*.*

Selmer

$$T(\mathrm{x}) = (x_1, x_2, x_3 - x_1)$$
$$\text{pour } x_1 < x_2 < x_3$$

Brun

$$T(\mathrm{x}) = (x_1, x_2, x_3 - x_2)$$
$$\text{pour } x_1 < x_2 < x_3$$

Algorithmes de fraction continue

Poincaré

Théorème (Nogueira 1995)

Pour presque tout x*, les approximations ne convergent pas vers* x*.*

Selmer

Théorème (Schweiger 2000)

L'algorithme converge et l'application T *est ergodique.*

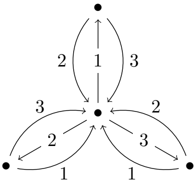
Brun

Théorème (Broise 1994)

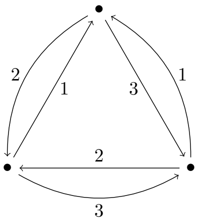
L'algorithme converge et l'application T *est ergodique.*

Algorithmes de fraction continue

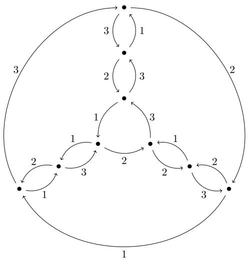
Poincaré



Selmer

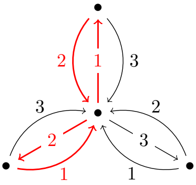


Brun

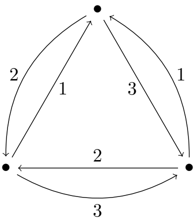


Algorithmes de fraction continue

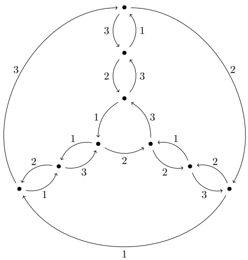
Poincaré



Selmer



Brun



Critère d'ergodicité

Théorème (F.)

Si un algorithme n'a pas de sous-graphe stable, il est ergodique et sa suspension canonique admet une unique mesure invariante d'entropie maximale.

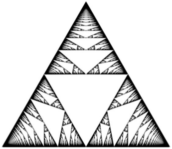
Critère d'ergodicité

Théorème (F.)

Si un algorithme n'a pas de sous-graphe stable, il est ergodique et sa suspension canonique admet une unique mesure invariante d'entropie maximale.

Applications

- Dimensions fractales



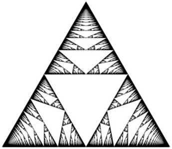
Critère d'ergodicité

Théorème (F.)

Si un algorithme n'a pas de sous-graphe stable, il est ergodique et sa suspension canonique admet une unique mesure invariante d'entropie maximale.

Applications

- Dimensions fractales
- Dynamique de Teichmüller
- Normalité

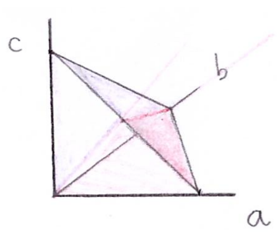


Algorithme de Farey

Du simplexe au système simplicial

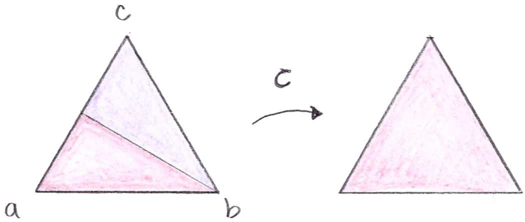
Opérations élémentaires

$$T : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+^3 \text{ et } T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b, x_c) & si\ x_a > x_c \\ (x_a, x_b, x_c - x_a) & si\ x_c > x_a \end{cases}$$



Opérations élémentaires

$$T : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^3_+ \text{ et } T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b, x_c) & si\ x_a > x_c \\ (x_a, x_b, x_c - x_a) & si\ x_c > x_a \end{cases}$$



Opérations élémentaires

$$T : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+^3 \text{ et } T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b, x_c) & si\ x_a > x_c \\ (x_a, x_b, x_c - x_a) & si\ x_c > x_a \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta_1 \\
\Delta \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "c"'] & \\
 & \Delta_2
\end{tikzcd}$$

Opérations élémentaires

$$T : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+^3 \text{ et } T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b, x_c) & si\ x_a > x_c \\ (x_a, x_b, x_c - x_a) & si\ x_c > x_a \end{cases}$$

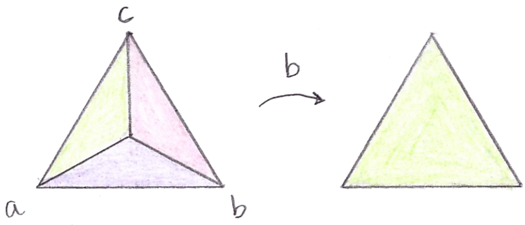
$$\begin{tikzcd} & \Delta_1 \\ \Delta \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, red, "c"'] & \\ & \Delta_2 \end{tikzcd}$$

$$x_c < x_a$$

On dit que c **perd** et a **gagne**

Opérations élémentaires

$$T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b - x_c, x_c) & si \ \min(x_a, x_b) > x_c \\ (x_a - x_b, x_b, x_c - x_b) & si \ \min(x_a, x_c) > x_b \\ (x_a, x_b - x_a, x_c - x_a) & si \ \min(x_b, x_c) > x_a \end{cases}$$



Opérations élémentaires

$$T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b - x_c, x_c) & si \ \min(x_a, x_b) > x_c \\ (x_a - x_b, x_b, x_c - x_b) & si \ \min(x_a, x_c) > x_b \\ (x_a, x_b - x_a, x_c - x_a) & si \ \min(x_b, x_c) > x_a \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} & \Delta_1 & \\ & \Delta \arrow[u, "a"'] \arrow[dl, "c"'] \arrow[dr, "b"] & \\ \Delta_2 & & \Delta_3 \end{tikzcd}$$

Opérations élémentaires

$$T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b - x_c, x_c) & \textit{si } \min(x_a, x_b) > x_c \\ (x_a - x_b, x_b, x_c - x_b) & \textit{si } \min(x_a, x_c) > x_b \\ (x_a, x_b - x_a, x_c - x_a) & \textit{si } \min(x_b, x_c) > x_a \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} & \Delta_1 & \\ & \Delta \arrow[u, "a"'] \arrow[dl, "c"'] \arrow[dr, "b", red] & \\ \Delta_2 & & \Delta_3 \end{tikzcd}$$

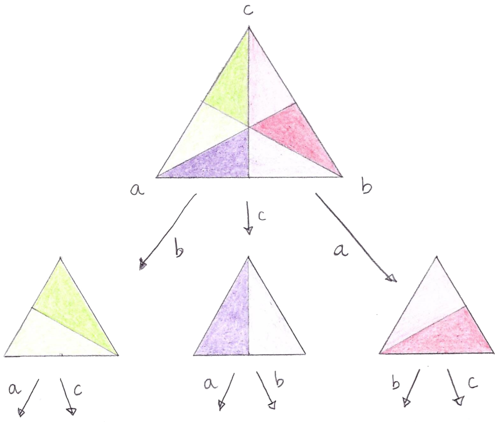
$$x_b < x_a, x_c$$

On dit que b **perd** et a, c **gagnent**

Algorithme de Poincaré

$$T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a, x_b - x_a, x_c - x_b) & si\ x_a < x_b < x_c \\ (x_a, x_b - x_c, x_c - x_a) & si\ x_a < x_c < x_b \\ (x_a - x_c, x_b, x_c - x_b) & si\ x_b < x_c < x_a \\ \dots \end{cases}$$

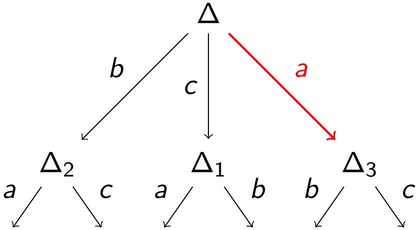
Algorithme de Poincaré



Algorithme de Poincaré

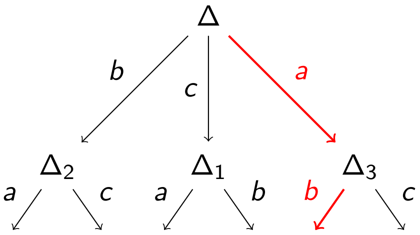
$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \Delta \arrow[dlll, "b"'] \arrow[d, "c"'] \arrow[drrr, "a"] & & & & \\
 & \Delta_2 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "c"] & & & \Delta_1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & & & \Delta_3 \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "c"] & \\
 {} & & {} & {} & & {} & {} & & {}
\end{tikzcd}
$$

Algorithme de Poincaré



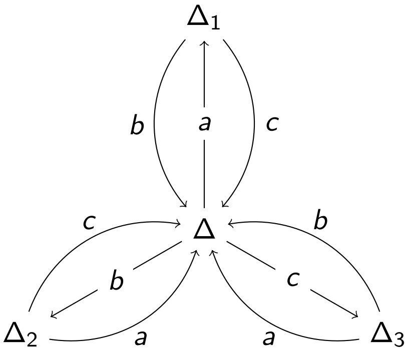
$$x_a < x_b,\ x_c$$

Algorithme de Poincaré



$$x_a < x_b < x_c$$

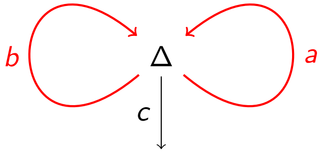
Algorithme de Poincaré



Comportement des marches aléatoires

Stabilité des sous graphes

Supposons $q_a, q_b \gg q_c$



Considérons le temps d'arrêt $\mathcal{L}_c$ correspondant à la longueur du chemin avant que c ne soit empruntée, on dit que c *perd*.

Lemme

Pour tout $q \in \mathbb{R}_+^3$

$$\mathbb{P}_q(\mathcal{L}_c < \infty) \leq \frac{Kq_c}{\min(q_a, q_b)}.$$

Critère d'ergodicité

Théorème

Une système simplicial sans sous-graphes stables admet une unique mesure ergodique absolument continue par rapport à Lebesgue et cette mesure induit l'unique mesure d'entropie maximale sur la suspension canonique.

Fractales

Soit v un sommet du graphe G et $\Pi^G(v)$ l'ensemble des chemins infinis dans le graphe partants de v. Alors

$$\Delta^G \simeq \Pi^G(v).$$

Fractales

Soit v un sommet du graphe G et $\Pi^G(v)$ l'ensemble des chemins infinis dans le graphe partants de v. Alors

$$\Delta^G \simeq \Pi^G(v).$$

Soit F un sous-graphe de G et v un sommet de F. On définit le sous ensemble de points du simplexe correspondant aux chemins restants dans F

$$\Delta^G(F) \simeq \Pi^F(v).$$

Fractales

Soit v un sommet du graphe G et $\Pi^G(v)$ l'ensemble des chemins infinis dans le graphe partants de v. Alors

$$\Delta^G \simeq \Pi^G(v).$$

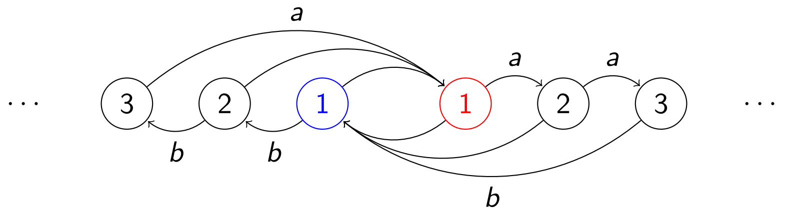
Soit F un sous-graphe de G et v un sommet de F. On définit le sous ensemble de points du simplexe correspondant aux chemins restants dans F

$$\Delta^G(F) \simeq \Pi^F(v).$$

Exemples

- Ensembles des nombres réels à fraction continue bornée.
- Baderne de Rauzy.

Exemple



Théorème

Soit F un sous-graphe de G avec la propriété de sortie rapide, alors la dimension de Hausdorff de $\Delta^G(F)$ satisfait

$$\dim_H \Delta^G(F) \leq |\mathcal{A}| - 2 + \frac{\kappa}{|\mathcal{A}|}$$

où κ est l'unique solution de l'équation

$$P(-\kappa \cdot (\log Jac)_{|\Delta(F)}) = 0.$$

Théorème

Soit F un sous-graphe de G avec la propriété de sortie rapide, alors la dimension de Hausdorff de $\Delta^G(F)$ satisfait

$$\dim_H \Delta^G(F) \leq |\mathcal{A}| - 2 + \frac{\kappa}{|\mathcal{A}|}$$

où κ est l'unique solution de l'équation

$$P(-\kappa \cdot (\log Jac)_{|\Delta(F)}) = 0.$$

Remarque

Cas d'égalité pour les ensembles de réels à fraction continue bornée.

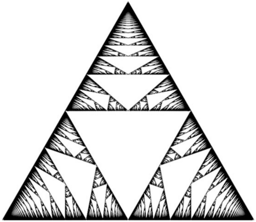
Théorème

Soit F un sous-graphe de G avec la propriété de sortie rapide, alors la dimension de Hausdorff de $\Delta^G(F)$ satisfait

$$\dim_H \Delta^G(F) \leq |\mathcal{A}| - 2 + \frac{\kappa}{|\mathcal{A}|}$$

où κ est l'unique solution de l'équation

$$P(-\kappa \cdot (\log Jac)_{|\Delta(F)}) = 0.$$



Théorème

Soit F un sous-graphe de G avec la propriété de sortie rapide, alors la dimension de Hausdorff de $\Delta^G(F)$ satisfait

$$\dim_H \Delta^G(F) \leq |\mathcal{A}| - 2 + \frac{\kappa}{|\mathcal{A}|}$$

où κ est l'unique solution de l'équation

$$P(-\kappa \cdot (\log Jac)_{|\Delta(F)}) = 0.$$

Corollaire

Soit $\mathcal{G}^d$ la baderne de Rauzy de dimension d, alors

$$\dim_H(\mathcal{G}^2) < 1.825$$
$$\dim_H(\mathcal{G}^3) < 2.7$$
$$\dim_H(\mathcal{G}^4) < 3.612$$

Théorème

Soit F un sous-graphe de G avec la propriété de sortie rapide, alors la dimension de Hausdorff de $\Delta^G(F)$ satisfait

$$\dim_H \Delta^G(F) \leq |\mathcal{A}| - 2 + \frac{\kappa}{|\mathcal{A}|}$$

où κ est l'unique solution de l'équation

$$P(-\kappa \cdot (\log Jac)_{|\Delta(F)}) = 0.$$

Corollaire

Soit $\mathcal{G}^d$ la baderne de Rauzy de dimension d, alors

$$\dim_H(\mathcal{G}^d) < d - 1 + \frac{\log d}{\log 2 \cdot (d+1)} + o(d^{-1.58}).$$

Normalité

$$\sqrt{7} = 2.64575131106459\ldots$$

$$e = 2.718281828459045235360\ldots$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264 3\ldots$$

Normalité

$$\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots]$$

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, \ldots]$$

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \ldots]$$

Normalité

Le nombre $x = [a_1, a_2, \ldots]$ d'un nombre x est dit normal si pour tout mot fini $w \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x[1\ldots n]\|_w}{n} = \mu(w).$$

Normalité

Le nombre $x = [a_1, a_2, \dots]$ d'un nombre x est dit normal si pour tout mot fini $w \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\|x[1 \dots n]\|_w}{n} = \mu(w).$$

Théorème (Vandehey, Berthé–Carton–F)

La normalité pour les fractions continues (multidimensionelles) est préservée par homographie.

Merci de votre attention !